Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: ENSEÑANZA DE FUNCIONES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y CALCULADORAS GRAFICADORAS

Evelio Bedoya Moreno

Granada, Mayo, 2002

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: ENSEÑANZA DE FUNCIONES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y CALCULADORAS GRAFICADORAS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los Doctores D. Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y D. José Gutiérrez Pérez del Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación de la Universidad de Granada que presenta el Matemático Evelio Bedoya Moreno para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: ***Evelio Bedoya Moreno***

VºBº de los Directores:

Fdo.: ***Luis Rico Romero***

Fdo.: ***José Gutiérrez Pérez***

Este trabajo ha sido realizado dentro del Grupo de Investigación **"Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico"** de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM193). Su autor ha sido becario del proyecto de Formación de Investigadores en Educación Matemática para América Latina (FIEMAL), número 7.0124.9, del Programa ALFA de la Comisión Europea. Bienio 1998-2000.

AGRADECIMIENTOS

A mis dos Directores de Tesis, Doctores D. **Luis Rico Romero** y D. **José Gutiérrez Pérez**, por la orientación y aliento que siempre me brindaron y por compartir conmigo sus conocimientos e ideas sobre Educación y Didáctica de las Matemáticas, y por su amistad, apoyo permanente, generosidad y paciencia.

A los Doctores Da. Encarnación Castro y D. Isidoro Segovia por su solidaridad, apoyo y aportaciones siempre que fue necesario y por su generosa intervención durante las etapas de los ensayos pilotos.

A los profesores D. José Ortiz por su desinteresada y solícita colaboración siempre que lo necesité y por su vinculación al equipo de investigación como observador durante el desarrollo del estudio empírico; y a D. Pedro Gómez por el problema y sus aportaciones sobre "la cuestión cuadrática".

A los Dres. D. Enrique Castro, D. Chema Cardeñoso, D. Paco Ruiz y D. Pablo Flores por el tiempo y el espacio que me facilitaron cada vez que los necesité y por las horas de conversación sobre el problema. Así mismo, a todos los profesores del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), así como a los demás profesores, personal y doctorandos del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

A todos los alumnos de la Licenciatura de Matemática de la Universidad de Granada que participaron en las distintas ediciones del programa de formación inicial de profesores de Matemáticas de enseñanza secundaria.

A todos mis profesores y compañeros del Doctorado de Didáctica de las Matemáticas y a los miembros del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Al Instituto Municipal de Educación del Ayuntamiento de Barcelona (IMEB) y a la Dra. Da. Carmen Gómez Granell por el apoyo y respaldo que me brindaron durante las fases iniciales del trabajo, mi estancia en Barcelona y su interés permanente por mi trabajo.

A la Universidad del Valle, al Departamento de Matemáticas y a los miembros del Área de Educación Matemática del Departamento de Matemáticas, por brindarme su apoyo para realizar mis estudios doctorales.

A la empresa *Texas Instruments,* por facilitarme las calculadoras graficadoras, los accesorios y documentos para realizar este trabajo.

A la Dra. Da. **Mari Ángeles Pérez Romero**, por su colaboración en todos los aspectos y sentidos, especialmente por su amor y amistad siempre.

Reconozco que sin los distintos tipos de colaboración, participación y apoyo de estas personas e instituciones, no habría sido posible realizar este trabajo.

A mi hija Laura Patricia
A mis padres
A Mari Ángeles y Ana Victoria
A mis hermanas y hermanos
A mi amigo Harold
A Ludwig van Beethoven,
por su maravillosa música
(6ª, 7ª, 9ª, Triple concierto, Fantasía coral, etc.)
que me acompañó e inspiró
en todo momento.

ÍNDICE

VII. CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES FINALES

GLOSARIO DE ABREVIACIONES

AD	Análisis didáctico.
CD	Conocimiento didáctico.
CG	Calculadora(s) Graficadora(s).
CM	Contenido Matemático.
CT	Conocimiento sobre las utilidades didácticas de la tecnología (calculadora).
EC	Estructura conceptual.
FD	Formación Didáctica.
FI	Formación Inicial.
F-I	Fase Inicial del proceso de desarrollo y evaluación del programa.
F-E.1	Fase intermedia o de ejecución y evaluación del programa (primera subfase).
F-E.2	Fase intermedia de ejecución y evaluación del programa (segunda subfase)
F-F	Fase Final del proceso de desarrollo y evaluación del programa.
I-A	Investigación-acción.
NTR	Nuevas Tecnologías de representación.
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*.
PNA	Grupo Pensamiento Numérico y Algebraico.
PME	*International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
SCS	Sistema de Cálculo Simbólico.
SEIEM	Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
SR	Sistemas de Representación.
TI-83	Calculadora Graficadora *Texas Instrument* modelo TI-83.
TI-92	Calculadora Graficadora *Texas Instrument* modelo TI-92.

OBSERVACIÓN: Para la presentación de este informe nos hemos basado fundamentalmente en las normas de la A.P.A. (2000).

Cuando una cosa está mal decía mi maestro –habla Mairena a sus alumnos–,
debemos esforzarnos por imaginar en su lugar otra que esté bien;
si encontramos, por azar, algo que esté bien,
intentemos pensar algo que esté mejor.
Y partir siempre de lo imaginado,
de lo supuesto...
nunca de lo real.
(A. Machado).

Las cosas deberían explicarse de modo tan sencillo
como sea posible, pero no más.
(A. Einstein).

INTRODUCCIÓN GENERAL

El trabajo que presentamos es un estudio evaluativo sobre formación inicial y formación didáctica de futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. Se concreta en el diseño, planificación, implementación y evaluación de un **programa de formación curricular**, orientado hacia la reflexión conjunta por parte de todos los participantes, sobre sus maneras de concebir, tanto el conocimiento matemático sobre las funciones considerado como un sistema o estructura conceptual, como sobre sus metodologías de enseñanza. En la práctica, el programa se referirá al desarrollo de conocimientos didácticos bases de un tipo de formación didáctica orientada hacia el diseño de actividades y unidades didácticas sobre los elementos fundamentales que organizan la estructura matemática del concepto escolar de función, en general, y de función, trinomio y ecuación cuadrática, en particular. Estos conocimientos didácticos, estarán referidos también a la pluralidad de los sistemas de representación usuales en Matemáticas y a los recursos y utilidades curriculares de las nuevas tecnologías informáticas con opciones de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico incorporado, como las modernas calculadoras graficadoras (modelos TI-83 y TI-92) con las cuales nos proponemos trabajar. En este estudio concebimos estas tecnologías como herramientas mediadoras y catalizadores de los conocimientos matemáticos a través de sus distintos tipos de representación y sus posibilidades de visualización dinámica e interactiva.

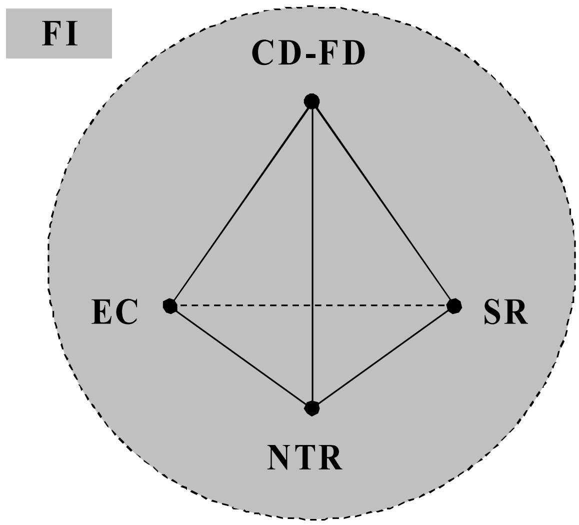
Más específicamente, la **formación inicial** (**FI**) y la **formación didáctica** (**FD**) de los futuros profesores de Matemáticas, y por consiguiente, el diseño, estructura e implementación del **programa de formación**, objeto de estudio y evaluación, los concebimos enmarcados, conceptual y metodológicamente, en la propuesta de los **organizadores del currículo** elaborada en el seno del grupo de investigación sobre **Pensamiento Numérico y Algebraico** (**PNA**) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Rico, 1997*a*). Los sujetos que participarán en el curso-taller en el que se concretará en la práctica el programa son a su vez alumnos del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria que este Departamento ofrece a los estudiantes del último curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. Estos alumnos tienen la oportunidad de conocer en términos generales la propuesta de los organizadores en una de las asignaturas de dicho Plan –"Didáctica de la Matemática en el Bachillerato"-. En el curso-taller tendrán la oportunidad de ampliar o profundizar localmente estos conocimientos didácticos de manera sistémica en torno a un modelo local de los organizadores.

Los sistemas educativos evolucionan al compás de las transformaciones sociales, científicas y tecnológicas; y también bajo la presión de los avances y dinámicas de la propia investigación educativa. Sin embargo, estas transformaciones suelen llegar a las aulas y a los currículos muy lentamente, sorteando todo tipo de inercias, obstáculos y resistencias ante el cambio. Por diversas causas y razones, en la práctica, la Educación Secundaria y, muy especialmente, la formación didáctica y cualificación profesional de su profesorado son ámbitos especialmente reticentes a estos procesos de cambios.

Los avances de la investigación en Educación Matemática reciente han mostrado que algunas de las causas más importantes de estos obstáculos y reticencias tienen mucho que ver con las dificultades por parte del profesorado y de los centros educativos para acceder a los nuevos desarrollos científicos y tecnológicos; así como a la gran complejidad teórica y práctica de los conocimientos didácticos que estos procesos de formación y transformación curricular, didáctica y profesional requieren. Pero, también se ha mostrado que una alternativa potencialmente eficaz para enfrentar estas dificultades consiste en abordarlas sistémica, profesional y científicamente desde la misma fase inicial de formación del profesorado, es decir, antes de que esto llegue a ser factiblemente tarde. En este estudio, nos proponemos diseñar, planificar, implementar y poner a prueba empíricamente un programa de formación inicial de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, con el propósito de estudiar estas dificultades, reticencias y procesos de accesión a dicha complejidad y adquisición de los conocimientos curriculares y didácticos bases de una formación didáctica más acorde con los desarrollos científicos, tecnológicos, educativos y profesionales recientes. Para tal efecto, hemos considerado como marco conceptual y metodológico del conocimiento curricular y didáctico bases de la formación didáctica, la propuesta de los organizadores para el currículo de matemáticas localizada en los distintos ámbitos o campos de interés de esta investigación, que indicamos sucintamente a continuación.

Cuatro de los campos que destacan en los últimos años en la investigación y desarrollo en Educación Matemática son: (**1**) los estudios centrados en la enseñanza / aprendizaje de las **funciones** sobre la **estructura conceptual** (**EC**) que organiza este importante concepto matemático; (**2**) los estudios sobre la pluralidad de **sistemas de representación** (**SR**) y comprensión de las matemáticas; (**3**) los estudios y trabajos dedicados a la didáctica de las matemáticas basado en la utilización de las nuevas tecnologías de representación múltiple, equipadas con sistema de cálculo simbólico, como las modernas **calculadoras graficadoras (CG)**; y (4) los trabajos sobre **formación inicial** (**FI**), **conocimiento didáctico** (**CD**) y **formación didáctica** (**FD**) del profesorado de matemáticas.

Estos cuatro campos constituyen **las cuestiones principales** de nuestro estudio. Las tres primeras –EC, SR y CG- definen objetiva y parcialmente sendos elementos **organizadores para el currículo de matemáticas** de acuerdo con esta propuesta (Rico, 1997*a*) teórica-práctica. La siguiente figura nos muestra esquemáticamente estas cuatro cuestiones principales, estructuradas y contextualizadas sistémicamente en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas.



De acuerdo con esto, y en términos generales, en este trabajo nos proponemos realizar una investigación evaluativa teniendo en cuenta esta cuádruple perspectiva. Para ello nos vamos a centrar en (**1**) un **contenido matemático** específico: el sistema o **estructura conceptual** (**EC**) referida al trinomio, la ecuación y las funciones polinómicas de segundo grado (Janvier, 1987*a*; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Gutiérrez, González y Rico, 1990; Dubinski y Harel, 1992; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993; Hitt, 1995; Rico, 2000); (**2**) los múltiples **sistemas de representación** (**SR**) usuales para las funciones –lenguaje usual y sistemas de representación numérico, gráfico y simbólico algebraico- (Janvier, 1987*b*; Duval, 1995; Hitt, 1996; Castro y Castro, 1997; Rico, 2000; entre otros); (**3**) las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**) modelos TI-83 y especialmente la TI-92, con sus utilidades didácticas interactivas y dinámicas de representación múltiple y cálculo simbólico (Demana, Schoen y Waits, 1993; Waits y Demana, 1995*a,b*; Hitt, 1998; Moreno, 1998; Kutzler, 1999); y (**4**) la **formación inicial** (**FI**) y la **formación didáctica** (**FD**) de los futuros profesores de matemática de enseñanza secundaria (Villar, 1988; Llinares y Sánchez, 1990; Llinares, 1991, 1998; García Blanco, 1996; Rico, 1997*c,d*; Flores, 1998*a,b*; Gil, 2000, Gil, Rico y Fernández, 2000). Este trabajo lo desarrollaremos en el marco conceptual y metodológico más general de la línea de investigación **PNA** (Pensamiento Numérico y Algebraico) y en el marco curricular e institucional del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

En síntesis, el objetivo general de este estudio consiste en diseñar, planificar, implementar y evaluar un programa local de formación inicial de futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, en el marco general del Plan de Formación de Profesores de Matemáticas que el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ofrece a los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Para concretar en la práctica el plan de investigación y el programa de formación a evaluar, diseñamos, desarrollamos, analizamos y evaluamos un curso-taller basado en los contenidos, tecnologías y fundamentos mencionados anteriormente. La evaluación del curso y del programa se hará a través del análisis de los **conocimientos didácticos** (**CD**) bases de la formación didáctica (**FD**) de los alumnos participantes, puestos de manifiesto en diferentes producciones e intervenciones, y a través de múltiples instrumentos y técnicas de observación, registro, análisis y evaluación de la información más relevante para nuestros objetivos e intereses.

Dos de los resultados generales más importantes que pretendemos conseguir con esta investigación son, por una parte, propuestas de cambio y mejora del programa de formación y del curso-taller asociado, contrastadas y validadas empíricamente, con miras a futuras generaciones o ediciones del mismo, en un contexto más natural y estandarizado. Y, por otra parte, pretendemos observar, describir y caracterizar los conocimientos didácticos de los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, detectadas en relación con las distintas propuestas curriculares, tecnológicas y didácticas formuladas y desarrolladas en el programa de formación. Esto es, en relación con su formación didáctica base de los procesos metodológicos necesarios para realizar un análisis didáctico dirigido al diseño, planificación, desarrollo y evaluación de propuestas curriculares y didácticas.

I

E L P R O B L E M A A I N V E S T I G A R

1.1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, muchas investigaciones en Educación Matemática sobre conocimiento profesional de profesores (Fennema y Franke; 1992; Even, 1993; Even & Tirosh, 1995; García, 1996; Blanco, 1996; Llinares, 1998; Flores, 1998*b*; Rico, 1998*a,b*, 1999) han mostrado que este conocimiento tiene un carácter multidisciplinar y complejo. También han mostrado las múltiples carencias y necesidades en la formación profesional y didáctica del profesor. Sin embargo, son escasas las implicaciones de esos estudios en los planes de formación del profesorado, en especial durante la etapa de formación inicial (Rico, 1992*a*, 1994, 1997*c*; Llinares, 1998; Rico y Flores, 1998; Gómez, 2001). La experiencia muestra que, en la práctica, los profesores de matemáticas de Educación Secundaria dan significados e integran sus conocimientos profesionales de forma intuitiva, espontánea y basada en la propia experiencia que han tenido como estudiantes de Educación Secundaria y Universidad. La escasa preparación del profesorado es debida, entre otras razones, a que durante sus etapas de formación los conceptos y competencias necesarios para su futuro ejercicio profesional les son presentados de forma disociada o inconexa. Además, en los planes de formación convencionales de los profesores de matemáticas existe la ilusión o creencia generalizada, de que una vez que tengan cierto dominio de la asignatura, basta tomar uno o dos cursos en los que se les suministre algunas nociones y técnicas básicas y generales sobre enseñanza (didáctica) de las matemáticas, para que, entonces, sean los mismos profesores, quienes, durante el propio ejercicio de la profesión como enseñantes, lleven a cabo esta integración de conocimientos y técnicas, sin necesidad de recibir una formación específica sobre las nociones curriculares y didácticas fundamentales, que les permita llevar a cabo esta integración y poder realizar, su actividad profesional con cierta garantía de éxito. De nuevo, la experiencia y la historia educativa se han encargado de poner de manifiesto que, en general, esta creencia o ilusión es equivocada.

Por otra parte, durante los últimos tres lustros, los resultados de las investigaciones relacionadas con la enseñanza y la comprensión sobre el sistema conceptual de las **funciones**, sobre la pluralidad e interrelación de los **sistemas de representación** (**SR**) usuales en matemáticas y sobre las utilidades curriculares y didácticas de las **nuevas tecnologías de representación** (**NTR**), han aportado información considerable y útil para las actividades de diseño y desarrollo del currículo de matemáticas, en particular para la enseñanza de las funciones (Janvier, 1987; Shell Centre, 1986; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Sierpinska, 1992; Dubinski y Harel, 1992; Romberg, Fennema & Carpenter, 1993; Tall, 1996; Hitt, 1999; Zaslavsky, 1997; Ruiz, 1998). De este modo y, en cierta forma, se enriquecen las fuentes del conocimiento profesional, aunque, desafortunadamente hasta el momento, de una forma no integrada.

En este estudio consideramos que los futuros profesores de matemáticas pueden llegar a construir sus conocimientos relativos a las tareas de planificación curricular, reflexionando sobre la multiplicidad de significados que tienen los conceptos matemáticos cuando se les considera como objetos de enseñanza y aprendizaje. Nos referimos en particular a un **conocimiento didáctico** (**CD**) que concebimos desde la perspectiva de **los organizadores del currículo** (Rico, 1997*a*), y que tiene un carácter multidimensional e integrado en su contenido y en el tiempo. Consideramos la investigación que nos proponemos realizar al respecto conectada con un plan de formación inicial de profesores de matemáticas, que incluye los organizadores del currículo como parte de un aparato conceptual, necesario para tareas de planificación curricular. De hecho, nos centramos sobre un programa de formación específico adaptado en su estructura a las líneas generales del plan de formación de referencia (Rico, 1992*a*; Rico y Flores,) y en el que destaca un tópico: las funciones, y unos organizadores concretos: la estructura conceptual asociada a este tópico, los sistemas de representación y las calculadoras graficadoras. Nos proponemos, entonces, estudiar y evaluar los efectos o influencias del programa de formación que hemos diseñado y que realizaremos para tal fin.

En cualquier caso, esperamos que al estudiar, describir y caracterizar la **formación didáctica** (**FD**) de los futuros profesores de matemáticas en torno a las cuestiones principales de este estudio (**EC**, **SR**, **CG**) podamos realizar algunos aportes significativos, locales o específicos sobre el conocimiento profesional, útiles en general para la investigación sobre formación del profesorado de matemáticas y, en particular, para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones en el contexto del Currículo de Matemáticas de Educación Secundaria.

1.2. LOS CUATRO TIPOS DE CUESTIONES PRINCIPALES QUE ENMARCAN ESTE ESTUDIO

Con carácter general, son varias las cuestiones y campos de resultados, producidos en los últimos 20 años, principalmente en la Didáctica de la Matemática, que delimitan este estudio y pueden resumirse en los cuatro apartados siguientes:

- 1ª: Cuestiones referidas al contenido matemático: Desde una perspectiva cognitiva la noción de función tiene una enorme complejidad conceptual y procedimental, en particular, las nociones de función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática. Nos interesa valorar especialmente qué aspectos destacan y cuáles relaciones y transformaciones predominan cuando se abordan desde la múltiple perspectiva de su estructura conceptual (**EC**) los sistemas de representación (**SR**) y las utilidades curriculares de las nuevas tecnologías de representación (NTR) con sistema de cálculo simbólico (SCS) incorporado. Los principales trabajos revisados en este ámbito y sobre los cuales daremos cuenta más ampliamente en los capítulos siguientes son los de Janvier (1987*a*); González y otros (1989); Vinner y Dreyfus (1989); González y otros (1990); Gutiérrez y otros (1990); Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990); Dubinsky y Harel (1992); Sierpinska (1992); Romberg, Fennema y Carpenter (1993); Eisenberg (1994); Hitt (1996, 1999); Zaslavsky (1997); Gómez y Carulla (1999), principalmente.

- 2ª: Cuestiones referidas a los sistemas de representación (SR): La pluralidad y a la vez la especificidad de los sistemas de representación y sus posibilidades de articulación, complementación y de visualización, además de constituirse como factores de complejidad conceptual pueden ser concebidos como organizadores curriculares locales o específicos del contenido matemático en torno al cual nos proponemos desarrollar este trabajo. Los principales trabajos consultados en este ámbito son los de Bishop (1983, 1989); Janvier (1987*b*); Zimmermann y Cunningham (1991); Rico, Castro y Romero (1996, 2000); Rico (1997*a*, 2000); Castro y Castro (1997); Duval (1995, 1999); Hitt (1999, 2000); Radford (2001), principalmente.

- 3ª: Cuestiones didácticas referidas a las nuevas tecnologías de representación (NTR**) con sistema de cálculo simbólico (**SCS**):** Las posibilidades técnicas, lógicas y matemáticas de la herramienta tecnológica, en particular de las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**) en tanto que instrumentos mediadores de representación y visualización, deben ser aprovechadas como utilidades didácticas, e integrarse bajo una perspectiva organizadora del mencionado currículo local. En este campo de estudio los trabajos que mayor influencia han tenido entre los consultados, han sido los *Proceedings of The Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (1988-2002); Fey y Hirsch (1992); Kaput (1992); Demana, Schoen y Waits (1993); Dunham (1993, 1996); Dunham y Dick (1994); Waits y Demana (1995*a*,*b*); Hitt (1998); Ruthven (1990, 1996); Penglase y Arnold (1996); Moreno (1998); Santos (2000).

- 4ª: Cuestiones referidas a la formación inicial (FI), la formación didáctica (FD) y al conocimiento profesional: Los conocimientos que sustentan el marco teórico de los tres tipos de cuestiones previas constituyen **conocimientos didácticos** (**CD**) útiles para organizar el currículo de matemáticas de Educación Secundaria y para realizar tareas de diseño y **análisis didáctico** (**AD**), son, por tanto, necesarios para el conocimiento profesional de los profesores en formación. Uno de los propósitos de este trabajo está en estudiar las repercusiones o efectos que tienen estos **organizadores curriculares** (**OC**) para la **formación didáctica** (**FD**) de los futuros profesores de matemáticas, según quedan reflejados en sus producciones, en el diseño de **unidades didácticas** y en la propuesta~~s~~ de actividades y tareas para el aula durante el desarrollo del curso-taller. Los principales trabajos consultados sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria son los de Rico (1992, 1992*a*, 1994, 1997*c,d*, 1998*a,b,c*, 1999); Rico y Gutiérrez, (1994); Villar (1988); Llinares y Sánchez (1990); Llinares (1991); García (1996); Blanco (1996); Rico y Flores (1998); Flores (1998*b*); Gil (1999, 2000); Gil, Rico y Fernández (2000); Gómez (2001); Blanco y Mellado (2001); Gómez y Rico (2002).

Basándonos en las cuatro cuestiones principales, mencionadas anteriormente, nos proponemos estudiar (analizar y evaluar) las maneras como repercuten estos organizadores en la formación de los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Para ello hemos diseñado un curso-taller en el que se emplean una serie de materiales basados en la estructura conceptual (**EC**), en la pluralidad, conversión, articulación e interrelación de los diferentes **SR** y en las utilidades didácticas de las modernas **CG**, entendidas éstas como recursos mediáticos de representación de las funciones en general y el trinomio, la ecuación y las funciones cuadráticas, en particular. Nos interesa entonces estudiar y evaluar la forma como los profesores de matemáticas de Secundaria en formación introducen e integran en sus propuestas curriculares y, concretamente, en sus diseños de unidades didácticas sobre el trinomio y las funciones cuadráticas, las diferentes posibilidades derivadas de estos **OC**, a los cuales han tenido la oportunidad de acceder a través del curso-taller de formación que hemos diseñado con tales propósitos. En concreto, intentaremos caracterizar y valorar los dominios relativos a conocimientos, procedimientos y estrategias, así como determinadas actitudes que los profesores en formación tienen y desarrollan sobre:

- Las diferentes utilidades curriculares y didácticas de las **NTR**. En concreto, las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**) modelos TI-83 y TI-92.

- Las representaciones gráficas, numéricas, algebraicas y analíticas (simbólicas) y verbales de las funciones, así como las articulaciones, conversiones e interrelaciones que se dan entre ellas, aplicadas a la enseñanza y evaluación de las funciones en general y del trinomio, la ecuación y la función de segundo grado, en particular.

- La integración de los dominios o estructuras conceptuales (EC) de la noción de función mediante los **SR** y las **CG**, concebidos como concreciones de la propuesta de los **OC** (Rico, 1997*a*), en el diseño y desarrollo de **unidades didácticas** y delimitación de tareas para su enseñanza y evaluación.

1.3. INTERÉS Y RACIONALIDAD DEL PROBLEMA

> Los programas curriculares de matemáticas deberían usar tecnologías para ayudar a los estudiantes a comprender las matemáticas y deben prepararlos para usar las matemáticas en un mundo con cada vez más tecnologías. Esta reflexión se refiere a tecnologías electrónicas, incluyendo calculadoras, computadoras y micro-laboratorios basados, porque el advenimiento de estas tecnologías es uno de los factores fundamentales que más afectan la educación hoy día. Tales tecnologías ofrecen un potencial a los estudiantes para ocuparse de una manera significativa de las ideas matemáticas (NCTM, 1989, p. 40).

1.3.1. Intereses personales

> La naturaleza del salón de clase es bastante similar en todos los países (Anderson, 1987, p. 81) y es notablemente estable a través del tiempo (Roulet, 1998, p. 6).

A principios de la década de los años 90, cuando llevaba alrededor de 10 años interesado en los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, principalmente en la Educación Primaria, mientras impartía clases de Algebra y Cálculo en la Universidad del Valle (Cali, Colombia), empecé a observar que algunos alumnos de Ciencias, Estadística e Ingeniarías utilizaban en las clases y especialmente en las sesiones de taller, calculadoras científicas más sofisticadas que las corrientes e incluso se empezaban a ver ya una que otra calculadora graficadora (CG), las cuales causaban gran impresión entre los demás compañeros. Mi primera reacción ante el hecho fue, primero de indiferencia y luego de precaución. Muchos profesores en situaciones similares suelen tener estas mismas actitudes ante la irrupción de nuevas tecnologías en su ámbito docente, cuando no de simple rechazo de estas. Recuerdo que les advertí que procuraran no utilizarlas salvo para realizar determinados cálculos de manera más rápida, pero que no se acostumbraran demasiado a ellas, porque, entre otras razones, no les permitiría utilizarlas en los exámenes. A pesar de ello, luego me interesé por conocer las posibilidades y utilidades técnicas, prácticas y sobre todo educativas de estas nuevas tecnologías.

Así fue como con un grupo pequeño de alumnos de Cálculo, Álgebra y Estadística de distintas carreras nos propusimos informalmente conocer más a fondo las posibilidades y utilidades de estas nuevas tecnologías en relación con los contenidos de dichas asignaturas. De estas prácticas surgieron pequeños trabajos integrados en el propio programa de contenidos del curso y que consistían básicamente en dar a conocer a los demás compañeros de estudio las posibilidades técnicas para realizar cálculos numéricos extensos y complejos de distintas operaciones y nociones matemáticas, matrices, series, derivadas e integrales numéricas, así como tratamientos estadísticos y gráficos de conjuntos relativamente grandes de datos numéricos.

De estas primeras experiencias surgió mi interés inicial por las nuevas tecnologías informáticas, como herramientas de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Algunos de estos alumnos eran a la vez profesores de matemáticas. Con ellos y algunos otros profesores empezamos a hacernos preguntas y a reflexionar al respecto sobre: ¿Qué posibilidades tecnológicas y educativas (peligros y consecuencias) tienen o podrían llegar a tener las nuevas tecnologías informáticas en relación con las matemáticas escolares, su aprendizaje y su enseñanza? ¿Qué consecuencias podría tener en los alumnos de las diferentes asignaturas el uso de tecnologías para realizar cálculos numéricos? ¿Cómo afectarían sus aprendizajes y conocimientos? ¿Qué ventajas e inconvenientes suponen? ¿Qué tipo de alumnos son más proclives a quererlas usar? ¿Qué tipo de alumnos y por qué tienden a rechazarlas de entrada? ¿Qué piensan otros profesores sobre estas cuestiones? ¿Qué razones de fondo tienen la mayoría de los profesores de matemáticas de la Universidad para rechazarlas tan radicalmente? ¿Cuál es nuestra verdadera actitud y concepción acerca de estas tecnologías y sus utilidades didácticas? ¿Qué sentido o cuáles podrían ser las consecuencias de utilizarlas con estudiantes de Educación Matemática (profesores de matemáticas en formación)?

Posteriormente, entre los años 92 y 93, algunos profesores del Departamento de Matemáticas que habían ido a los Estados Unidos a realizar estudios de Postgrado, regresaron al Departamento (Área de Educación Matemática) con información y propuestas de trabajo sobre la utilización de algunas tecnologías (*Derive*, *Cabri*, *Mathematica*) como herramientas de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los primeros cursos universitario. Durante estos años, gracias a ellos, tuve la oportunidad de revisar documentos con propuestas interesantes sobre la integración de las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas (Demana y Waits, 1988; NCTM, 1989; Demana y Waits, 1990; Cornu y Ralston, 1992; y Harvey). Hoy día, documentos de esta naturaleza constituyen importantes referencias para toda persona o grupo interesados en abordar problemas o trabajos relacionados con la introducción de nuevas tecnologías informáticas en el currículo de matemáticas. En mi caso, estas lecturas y reflexiones constituyeron fuentes poderosas de motivación e interés para trabajar en este campo.

1.3.2. Antecedentes del estudio

Aunque en esta sección continuaremos desarrollando algunos aspectos complementarios e interesantes que describen el itinerario de los intereses y antecedentes personales del doctorando sobre el problema de investigación, también presentaremos las principales ideas y referencias que permiten hacer, en términos generales, una contextualización y justificación curricular, institucional y educativa más amplia.

Tal y como se ha podido anticipar con los epígrafes iniciales de este apartado, los *Standards* (*Principles and Standards for School Mathematics*) del NCTM (1989, 2000) de los Estados Unidos, se han constituido en importantes referencias organizadoras parciales y fuente de inspiración e información para propuestas y reformas del currículo de matemáticas de la educación básica, no sólo de este país sino también de muchos otros países del mundo. Estos *Standards and Principles* consisten de una serie de pautas e indicaciones para el desarrollo del currículo y la enseñanza de las matemáticas escolares. Están organizados en función de los distintos niveles o grados de la Educación Primaria y Secundaria. Los estándares correspondientes a los grados 9-12 (14-16 años) que en términos generales enmarcan nuestro estudio, son los siguientes:

Estándar 2: Patrones, Funciones y Algebra
Estándar 6: Resolución de problemas
Estándar 7: Razonamiento y demostración
Estándar 8: Comunicación
Estándar 9: Conexiones
Estándar 10: Representaciones (NCTM, 1989, p. 10).

Por otro lado, los principios básicos para los programas instruccionales de las matemáticas escolares, que tienen un carácter más general que los estándares, son los siguientes:

El principio de equidad
El principio relativo al currículo de matemáticas
El principio de enseñanza
El principio de aprendizaje
El principio de evaluación
El principio relativo a la tecnología (NCTM, 1989, p. 9).

El principio relativo a la tecnología (*The Technology Principle*) (véase el epígrafe inicial del apartado 1.3), propone y justifica concisamente para todos los grados de educación básica, la integración de las modernas tecnologías en el currículo (en el aula y en las distintas actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas). Y en particular, para los Grados 9-12 (14-16 años) este principio propone lo siguiente:

> Para algunos estudiantes, la matemáticas aprendida en la escuela secundaria es la culminación de su preparación matemática formal para la vida y para el trabajo. Para otros, es la base sobre la cual construirá sus estudios formales adicionales, tanto en el colegio como en estudios posteriores...
> Los estudiantes deben desarrollar una sofisticación creciente en relación con algunos procesos de las matemáticas, especialmente los procesos relacionados con la resolución de problemas, las representaciones, el razonamiento y la comunicación...
> Los estudiantes de nivel superior en secundaria continúan desarrollando su disposición y habilidades para razonar sobre estos procesos matemáticos. Ellos deberían aprender a usar la tecnología para desarrollar una comprensión más profunda de la matemática. (NCTM, 1989, Standards for Grades 9-12, p. 271).

Las lecturas y discusiones sobre estos documentos contribuyen a recabar las justificaciones y fundamentos del interés e importancia de investigar sobre el problema que nos ocupa. En principio, y teniendo en cuenta la gran influencia que tales documentos han tenido en los currículos del ámbito internacional, los *Standards and Principles* del NCTM (1989, 2000) enmarcan muy bien y justifican nuestro problema de investigación. Otros documentos que también hemos revisado con el mismo propósito han sido, entre otros, los sucesivos *Proceedings of the International Annual Conferences on Technology in Collegiate Mathematics*, así como el documento con las directrices de la UNESCO editado por Cornu y Ralston (1992) sobre uso de tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos documentos también contribuyeron a justificar y fundamentar nuestro interés para trabajar sobre tales temas. En particular, los artículos de Demana y Waits (1988); Harvey, Demana y Waits (1990); Ralston (1992), Cornu (1992); Tall y West (1992) son informes y revisiones de investigaciones internacionales con propuestas concretas y fundamentos teóricos sobre las ventajas e inconvenientes de la introducción y utilización de las nuevas tecnologías informáticas en el currículo y en las clases de matemáticas en general de todos los niveles y, en particular, sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones en la Educación Secundaria y primeros cursos de la Universidad.

Pero, continuando con el itinerario personal, a comienzos del año 93 marché a la ciudad de Barcelona (España) con el propósito de realizar estudios de doctorado en

Educación Matemática en la Universidad Autónoma de Barcelona. Durante los primeros años de estancia en España (93 a 96), tuve la oportunidad de asistir a cursos y conferencias sobre el uso de nuevas tecnologías y Didáctica de la Matemática con profesores como Josep M. Fortuny, Eduard Martí, Vladimir Gisin, David Tall y Bert Waits, entre otros. Esta experiencia sirvió para mejorar y afianzar un poco más mis intereses y conocimientos sobre Educación Matemática y sobre la integración y utilización de las tecnologías en los currículos y procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, especialmente en los últimos cursos de Secundaria y primeros de Universidad. Durante este tiempo, también asesoré sobre las matemáticas escolares en la reforma curricular y sobre la integración de nuevas tecnologías en el currículo a la Dra. Carmen Gómez Granell, Directora e investigadora del Instituto Municipal de Educación del Ayuntamiento de Barcelona (IMEB) y del Instituto Municipal de Investigaciones en Psicología Aplicada a la Educación (IMIPAE). Todas estas experiencias ayudaron a definir aun más mi interés por este tipo de problemas didácticos y tecnológicos.

El trabajo final de tercer ciclo, con el cual opté a la suficiencia investigadora y al título de Magister en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales en el Departament de Didàctica de la Matemática y de les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona, versó sobre Didáctica de las Matemáticas y nuevas tecnologías. Este trabajo tuvo como título "**Estudio del Sistema Didáctico en torno a los conceptos básicos del Análisis Matemático: basado en un enfoque de visualización didáctica asistido por nuevas tecnologías graficadoras**" (Bedoya, 1996). Lo realicé bajo la dirección del Dr. Vladimir Gisin, de la Universidad de Moscú quien se encontraba realizando una estancia en el Centro de Investigaciones Matemáticas de Cataluña y bajo la tutoría del Dr. José Manuel Yábar, profesor del Departament de Didàctica de la Matemática de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Los objetivos principales de esta memoria de Tercer Ciclo consistieron en estudiar, mediante estudios de casos, las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes de Enseñanza Secundaria en la comprensión y aprendizaje de conceptos básicos del Análisis - funciones, continuidad, límite, derivada -. Para ello, nos propusimos formular una propuesta didáctica particular en torno a algunos tópicos concretos de estos contenidos matemáticos y basada en un enfoque particular de visualización con el apoyo de la tecnología, que entonces denominamos como **visualización didáctica**. Las preguntas y reflexiones que sirvieron de guía para el desarrollo de este trabajo fueron las siguientes (Bedoya, 1996, p. 13):

- ¿Cuales son las dificultades y limitaciones más comunes de la enseñanza tradicional (sin tecnología) de los conceptos básicos del Análisis Matemático?
- ¿Las nuevas tecnologías (en particular las modernas calculadoras graficadoras) resuelven en alguna medida las limitaciones de los recursos y materiales didácticos tradicionales para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos básicos del Análisis?
- ¿Cómo influye y se refleja en el aprendizaje y la enseñanza de los conceptos básicos del Análisis la introducción de las nuevas tecnologías graficadoras en el proceso?
- ¿Cuáles son las principales dificultades u obstáculos didácticos asociados con el enfoque particular de visualización didáctica propuesto en este trabajo?

Con estas preguntas en mente seleccionamos 4 alumnos de 8º de EGB (14/15 años), 2º de BUP (15/16), 3º de BUP (17/18) y COU (19/20), respectivamente, y trabajamos de 2 a 3 horas a la semana y durante el desarrollo de un curso académico completo, sobre los temas o tópicos que en esos momentos sus compromisos escolares les exigían. Esto lo convenimos así para no obstaculizar o dificultar las dinámicas académicas matemáticas cotidianas de cada uno de ellos. En general, algunos de los temas del programa curricular correspondiente (contenido matemático del trabajo), que trabajamos utilizando CG cuando lo consideramos pertinente fueron los siguientes:

- Noción de función y representación gráfica.
- Funciones lineales.
- Funciones cuadráticas.
- Sucesiones
- Límite de una función en el infinito.
- Límite de una función en un punto.
- Asíntotas.
- Funciones continuas.
- Derivadas.

- Cálculo de derivadas.
- Aplicaciones de la derivada.

A partir de la experiencia y reflexiones realizadas durante el desarrollo de estos estudios de caso, intentamos observar, describir y analizar algunas de las dificultades tradicionales y ya clásicas de comprensión de los conceptos matemáticos sobre los cuales trabajamos utilizando como tecnología de apoyo las CG. Además, desarrollamos algunas ideas e instrumentos para el diseño, realización y análisis de un “dispositivo” (propuesta) didáctico para la enseñanza-aprendizaje de dichos conceptos, basado en nuestro enfoque particular de visualización didáctica.

Con este trabajo bajo el brazo, la experiencia y conocimientos adquiridos durante mi estancia en Barcelona y con interés en realizar una tesis doctoral sobre estos contenidos matemáticos –conceptos básicos del Análisis -, los sistemas de representación y la “visualización didáctica**”** y las nuevas tecnologías graficadoras (CG), me puse a la búsqueda en España del Director de tesis que me pareciera más adecuado. Así fue como a mediados del año 97 contacté con el profesor D. Luis Rico en Madrid durante un evento sobre investigación en Educación Matemática organizado por el CIDE y el MEC, al cual asistí especialmente con este propósito. A partir de este encuentro personal sostuvimos una prolongada correspondencia por correo electrónico acerca de los intereses y posibilidades de realizar la tesis doctoral bajo su dirección. Y él me propuso reformular el proyecto de investigación, enmarcándolo, conceptual y metodológicamente, en las propuestas y planteamientos teóricos y prácticos que su Grupo de investigación sobre **Pensamiento Numérico y Algebraico** (**PNA**) ha venido desarrollando en los últimos años en el seno del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. De este modo fué como iniciamos de forma definitiva la realización de este trabajo.

1.3.3. Ubicación del estudio en el currículo de Enseñanza Secundaria

El hecho de restringir las cuestiones de interés del estudio y por consiguiente la propuesta general de los organizadores a sólo tres de estos contenidos[1] (**EC, SR y CG**, descritos en la sección 1.2), es debido, entre otras razones, a la gran complejidad que en conjunto todos estos contenidos suponen, al menos en proporción a la escala de nuestro trabajo. Sin embargo, a la hora de realizar la planificación curricular y el análisis didáctico para desarrollar un programa de formación de profesores o en el marco de una investigación en Didáctica de las Matemáticas, se debe tener en cuenta y consultar los demás elementos organizadores que dicha propuesta general considera y propone (Rico, 1997*a*). Así, por ejemplo, en relación con la contextualización del contenido matemático y de los contenidos referidos a los otros organizadores (**EC**, **SR** y **CG**), desde el punto de vista de su ubicación y tratamiento curricular y cognitivo institucional, hemos considerado como referentes institucionales, principalmente el “Diseño Curricular Base” (DCB) para la “Educación Secundaria Obligatoria” (ESO) (MEC, 1989) y el documento sobre la “Estructura y Contenidos del Bachillerato” del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1991). Estos documentos y sus contenidos constituyen otro de los elementos de la propuesta general de los organizadores, y también, otro elemento importante de justificación y racionalización de este trabajo. A continuación, presentamos una breve sinopsis de la estructura y programas de los cursos de la Educación Secundaria en España correspondientes a los niveles educativos que nos interesan en este estudio.

En España, de acuerdo con la "Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo" (LOGSE) de 1990, los tópicos del contenido matemático que nos ocupan (funciones cuadráticas, trinomio y ecuación de segundo grado) están distribuidos en el Bloque # 4 de los contenidos del 4º curso de la ESO (15/16 años, equivalente a 2º de BUP), bajo el título de “Interpretación, representación y tratamiento de la información”, y en las “especialidades” de los cursos 1º y 2º de la Educación Secundaria Post-obligatoria (Bachillerato, 16/18 años, equivalente a 3º de BUP y COU), bajo el título de "Ciencias de la Naturaleza, de la Salud y Tecnología".

Educación Secundaria Obligatoria (ESO)	→	**Primer ciclo:**	**1º (12/13) (7º EGB)**
			2º (13/14) (8º EGB)
		Segundo ciclo:	**3º (14/15) (1º BUP)**
			4º (15/16) (2º BUP)
Educación Secundaria Post-obligatoria	→	**Bachillerato:**	**1º (16/17) (3º BUP)**
			2º (17/18) (COU)

Los programas propuestos por la LOGSE para los cursos 1º y 2º de Bachillerato (16/18 años) son, en resumen, los siguientes:

Primer curso:

- Progresiones (sucesiones) decimales
- Funciones
- Aproximación intuitiva al Análisis: ramas infinitas, continuidad, asíntotas, derivadas, puntos de derivada nula, área bajo curvas.

> "No se pretende que los alumnos adquieran destreza en el manejo de estas poderosas técnicas, sino que conozcan su existencia, su razón de ser y el papel que juegan en la búsqueda de las características sobresalientes de una función dada por su expresión analítica. [...] Todo ello ha de estudiarse no sólo en su armazón teórica, sino también en su proyección práctica, enseñando la utilización de las calculadoras gráficas como herramienta para operar con eficacia y como recurso para indagar propiedades" (MEC, 1991).

Segundo curso:

- Análisis

> "Se pasa del nivel intuitivo del curso anterior a un estudio sistemático, mediante el aprendizaje de métodos para el cálculo de límites y de derivadas, de su justificación teórica y de su aplicación al estudio de funciones" (MEC, 1991).

---

[1] En términos generales, "se entiende por contenidos el conjunto de formas culturales y de saberes seleccionados para formar parte de (organizar) las distintas áreas curriculares en función de los objetivos generales del área. Estos pueden ser hechos discretos, conceptos, principios, procedimientos, valores, normas y actitudes" (Coll, 1988, el paréntesis es nuestro).

Estas referencias son suficientes para mostrar que el tópico en que se centra nuestro estudio en relación con el contenido matemático se sitúa curricularmente entre el Segundo Ciclo de la ESO (14-16 años) y el Bachillerato (16-18 años), de acuerdo con el currículo oficial de España prescrito por la LOGSE. A la vez, permiten poner de manifiesto la importancia de tener en cuenta los aspectos conceptuales y procedimentales del conocimiento matemático, así como también la conveniencia de utilizar las nuevas tecnologías (o CG), no sólo como herramientas de cálculo y "para operar con eficacia", sino también "como recurso para indagar propiedades" y facilitar la comprensión conceptual de determinadas nociones matemáticas.

1.3.4. Antecedentes en Didáctica de la Matemática

Para terminar con esta introducción sobre los antecedentes y racionalidad del problema, consideramos pertinente presentar aquí algunas de las principales referencias en el contexto internacional de la Didáctica de la Matemática, relacionadas especialmente con estudios sobre funciones y NTR. Dos de las más importantes son, por un lado, el conocido artículo escrito por Leinhardt y cols. (1990): *Functions, Graph, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*. Y, por otro lado, la no menos conocida revisión hecha por Romberg y cols. (1993): *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*.

Estos dos documentos presentan las más completas revisiones sobre las más importantes investigaciones relacionadas con la didáctica de las funciones y sus representaciones gráficas, realizadas en los últimos 20 años hasta las fechas de cierre de este estudio. Por una parte, Leinhardt y cols., después de presentar su amplia revisión de trabajos sobre los procesos y dificultades de enseñanza-aprendizaje de las funciones y sus gráficas, concluyen y proponen a la comunidad investigadora en Didáctica de la Matemática las tres categorías siguientes para orientar los diferentes y necesarios trabajos a realizar en el futuro sobre didáctica de las funciones y sus representaciones gráficas:

(a) Considerar los distintos tipos de tareas al respecto y sus formas de presentación.

(b) Considerar el aprendizaje, intuiciones y dificultades alrededor de los procesos de comprensión de las gráficas y las relaciones de funcionalidad.
(c) Considerar cómo las funciones, las gráficas y los procedimientos son enseñados en el salón de clase utilizando tecnologías informáticas.

Estas autoras concluyen su trabajo formulando y dejando la siguiente pregunta abierta a la comunidad Didáctica de la Matemática: "*What do we need to further our communal understanding of this area*?" (Leinhardt y cols., 1990, p.54).

Tres años más tarde, Romberg y cols. presentan su revisión monográfica sobre las investigaciones realizada en los últimos tres lustros sobre las funciones, sus representaciones y la problemática (consecuencias, dificultades, inconvenientes y ventajas) curricular y/o didáctica relacionada con la integración de las nuevas tecnologías graficadoras (*graphing technology*) en el currículo sobre funciones. Estos autores proponen reflexionar sobre las implicaciones que pueden y deben tener las investigaciones actuales y futuras sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, sus distintos tipos de representación y la utilización de nuevas tecnologías graficadoras en la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos. Romberg y cols. argumentan que conciben su trabajo como un intento de dar respuesta a la pregunta formulada por Leinhardt y cols., y abogan por la consolidación de un amplio programa internacional integrado sobre la investigación en torno a la didáctica de las funciones. Para ello, proponen como fundamental considerar las tres condiciones o criterios siguientes:

- 1ª: La necesidad de caracterizar conceptual y didácticamente (epistemológica, histórica, fenomenológica y cognitivamente), el dominio o campo de investigación relativo a las funciones y sus representaciones.

- 2ª: Consideran imprescindible tener en cuenta las cuestiones relacionadas con las posibilidades de las nuevas tecnologías graficadoras.

- 3ª: Finalmente, proponen la conveniencia de que estos trabajos tengan en cuenta o estén orientados a las implicaciones curriculares sobre las matemáticas en general y las funciones en particular.

Como se puede comprobar, nuestro estudio se refiere localmente a estos tres criterios programáticos para las futuras investigaciones, propuestas tanto por Leinhardt y cols (1990) como por Romberg y cols. (1993) en sus importantes y completas revisiones y trabajos.

Complementariamente, con el fin de ubicar disciplinarmente (antecedentes disciplinares y estado de la cuestión) y de actualizar nuestro problema de investigación con respecto a los trabajos más recientes sobre las cuatro cuestiones principales que enmarcan este estudio, realizamos búsquedas frecuentes y sistemáticas en bases de datos y publicaciones periódicas internacionales y nacionales, con soportes impresos o electrónicos, relacionadas con nuestros temas de interés en Didáctica de la Matemática. Los resultados más relevantes para nuestro estudio aparecerán reseñados especialmente en los capítulos II y IV.

Las principales bases de datos y publicaciones consultadas fueron las siguientes: ERIC (1990-2002); MATHDI (*Zentralblat für Didaktik der Mathematik*) (1996-1999); TESEO (búsqueda por descriptores); P-ICTCM: *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (1988-1994); EP-ICTCM: *Electronic Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (1995-2001); JRME: *Journal for Research in Mathematics Education* (1995-1998), *Educational Studies in Mathematics* (1996-1999), *Mathematics Education Research Journal* (1998-1999), *Journal of Mathematics Teacher Education* (1995-1999), *The Mathematics Teacher* (1990-2000); *Center for Teaching/Learning of Mathematics: Focus on Learning Problems in Mathematics* (1995-1999)*; The Mathematical Association: MATHEMATICS IN SCHOOL*, *Journal of Technology Education*; *Mathematics and Computer Education* (1998); *Enseñanza de las Ciencias* (1996-1998); *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*; *SUMA (1998-2000)*; *UNO* (1994-2000); *Revista EMA* (números sueltos).

Los resultados de estas búsquedas, por ejemplo, en la base de datos ERIC, nos han mostrado la prolífica producción de investigaciones y estudios más generales que se viene haciendo en las últimas dos décadas sobre distintos aspectos relacionados con cada una de estas cuatro cuestiones. Sin embargo, la abundancia ya no es tanta si cruzamos un campo con otro. Por ejemplo, si en la base de datos ERIC, entre los años 1990 y 2000, elegimos el descriptor "sistemas de representación" ("*representations*"), obtenemos 4159 documentos, y 42 con el descriptor "funciones cuadráticas" ("*functions*"). Muy pocos de estos documentos corresponden a trabajos de investigación. Y si elegimos los descriptores "funciones" y "sistemas de representación", obtenemos solamente 350 documentos. Sorprende encontrar tan pocos documentos de investigación relacionados con los descriptores "representaciones" y "calculadoras graficadoras" ("*graphing calculators*"): 14 entre 1990 y el 2000 en la base ERIC. Con el único descriptor "calculadoras graficadoras" se obtienen 310 documentos entre 1990 y el año 2000. Y con los descriptores "cuadrática", "calculadoras graficadoras" y "representaciones", se obtienen solamente 2 documentos. Uno de ellos es una memoria (genérica) publicada en los *Proceedings* del 19º PME (*Psychology of Mathematics Education Group*) realizado en Recife, Brasil, en el año de 1995. Estos ejemplos de búsquedas en las bases de datos muestran el panorama sobre los antecedentes y divulgación de trabajos relacionados con nuestro problema de investigación. En general e independientemente para cada cuestión hay relativamente mucha información disponible, pero, no se ha encontrado ningún documento que de forma simultánea aborde las cuatro cuestiones que intentamos estudiar en esta investigación.

En el siguiente cuadro reseñamos algunos de los documentos que nos interesaron particularmente entre los que encontramos en la búsquedas en las distintas bases de datos y publicaciones, complementarios de los que ya hemos reseñado:

AUTORES	AÑO	CENTRO DE INTERÉS DEL ESTUDIO
Demana, F., Waits, B. (Eds.)	1988	Memoria de la primera ICTCM (*International Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*). Esta memoria junto con todas las demás de este evento, desarrollado anualmente desde 1988 publica en formatos analógico y electrónico artículos y reseñas sobre investigación y propuestas de actividades relacionadas con el uso de nuevas tecnologías de representación (NTR) en educación matemática.

Fernández Cano, A.	1991	Tesis doctoral realizada en el MIDE de la Universidad de Granada. Se estudia el "*Impacto de la calculadora electrónica en la educación matemática primaria*". Es un estudio evaluativo de programas de tipo cuasi-experimental con alumnos de tercero de primaria. Se centra en la evaluación del diseño y del producto.
Kepner, H.	1992	Propuesta de actividades para la formación de profesores sobre el uso de NTR en la enseñanza de las matemáticas.
Keller, B., and Hirsch, Ch.	1994	Estudio sobre las preferencias de los estudiantes en relación con los distintos sistemas de representación convencionales para las funciones y el uso de NTR.
Dunham, P., and Dick, T.	1994	Reseña de las principales investigaciones publicadas hasta la fecha (1994), especialmente en el ámbito anglosajón de la educación matemática, relacionadas específicamente con la enseñanza de las matemáticas y el uso de calculadoras graficadoras (CG).
Kimmins, D.	1995	Descripción de un curso para la formación de profesores de matemáticas de secundaria sobre las múltiples posibilidades de las nuevas tecnología en la enseñanza de las matemáticas.
Harshbarger, R.	1995	Propuestas similares y complementarias a la anterior.
Penglase, M. y Arnold, S	1996	Una reseña crítica sobre la investigación en educación matemática relacionadas con el uso de CG. Incluye propuesta sobre posteriores estudios al respecto.
Zaslavsky, O.	1997	Estudio muy completo e interesante sobre los principales obstáculos conceptuales en el aprendizaje específico de las funciones cuadráticas.
Adams, T.	1997	Estudio sobre las principales dificultades que tienen los estudiantes de secundaria en relación con el aprendizaje del concepto de función. Propone actividades para ayudar a superar estas dificultades basándose en el uso de CG y el modelo cognitivo del "cambio conceptual".
Raymond, A.	1997	Este estudio (de casos múltiples) de carácter metodológico presenta una reseña de trabajos que han utilizado "mapas conceptuales" como instrumento para la investigación cualitativa

Schmidt, M. E.	1999	Estudio longitudinal sobre la evolución de las creencias de los profesores de educación media acerca de la incorporación de las calculadoras en el aula y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Si contrastamos estos resultados de las búsquedas en bases de datos y publicaciones relevantes para nuestro estudio o recientes en Didáctica de la Matemática con las propuestas integradoras de Leinhardt y cols (1990) y Romberg y cols. (1993), podemos concluir que estas propuestas o recomendaciones sobre la necesidad e importancia de desarrollar investigaciones específicamente sobre funciones, sistemas de representación y nuevas tecnologías de representación y visualización se mantienen vigentes.

1.4. HIPÓTESIS DE TRABAJO Y OBJETIVO GENERAL

En esta sección procederemos a precisar la aproximación al problema de investigación que hicimos al comienzo de este capítulo. Como un planteamiento general, consideramos que si los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria acceden o construyen el conocimiento didáctico (**CD**) base de una formación didáctica (**FD**) profesional, concebido con un carácter multidimensional e integrado tanto en su contenido como en el tiempo, tal y como se propone desde la perspectiva de la propuesta de los organizadores del currículo (**OC**) (Rico, 1997*a*), esto facilitará, enriquecerá y se reflejará en sus producciones y prácticas curriculares y didácticas. En este trabajo nos proponemos, entonces, estudiar y evaluar efectos o influencias del plan de formación que hemos diseñado basados en las consideraciones y las perspectivas anteriores, y el cual realizaremos para tales objetivos.

Para concretar lo anterior, adoptamos un modelo local o parcial de la propuesta general de los organizadores, los cuales describiremos más adelante, tanto como estrategia práctica para abordar el problema, así como marco o fundamento conceptual y metodológico del propio diseño de la investigación. En términos generales, dicho **modelo local de los organizadores** propone elementos y fundamentos conceptuales y metodológicos para abordar, en el plano teórico y práctico, la complejidad y sistematicidad que requiere la concepción de currículo y los procesos de análisis didáctico (**AD**) que subyace en este sistema de cuestiones. El modelo contempla entre sus componentes estructurales, las cuatro cuestiones principales del estudio mencionadas anteriormente, a saber, por una parte, los tres elementos o contenidos[1] organizadores del currículo - **EC, SR, CG** – y, por la otra, algunos aspectos específicos del conocimiento didáctico (**CD**) base de la formación didáctica (**FD**) inicial de los alumnos para profesores necesarias para el dominio de las matemáticas escolares, referidas en este caso al tema de funciones, con los cuales nos proponemos desarrollar el estudio. El carácter local del modelo consiste en que, por una parte, se refiere a determinados aspectos parciales de la propuesta más general de los organizadores del currículo; y por otra parte, se refiere a un contexto curricular concreto, el Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

El contenido matemático escolar específico sobre el cual vamos a trabajar consiste en las funciones elementales en general, y la función cuadrática, el trinomio de segundo grado y la ecuación cuadrática en particular. El estudio detallado sobre la estructura conceptual (**EC**) de este contenido es el primer elemento organizador considerado. El elemento o contenido organizador **SR** se refiere a los múltiples sistemas de representación –gráfico, numérico, algebraico y analítico (o simbólico) y lenguaje natural– que son usuales en las matemáticas escolares para el estudio de las funciones. En particular, nos interesan las especificidades del tratamiento de los objetos o conocimientos matemáticos en cada uno de estos sistemas, como las posibles interrelaciones y conversiones que se pueden dar entre ellos, aplicadas a la enseñanza, aprendizaje y evaluación del contenido matemático en cuestión. El tercer elemento o contenido organizador se refiere a las **CG** (modelos TI-83 y TI-92, respectivamente), equipadas con opciones de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico (SCS). Estas tecnologías son concebidas como herramientas mediadoras, catalizadores y utilidades curriculares en relación con las representaciones múltiples y visualizaciones de las distintas nociones sobre el contenido matemático que nos ocupa.

En síntesis, a través del diseño e implementación de un **programa** de formación inicial y del curso-taller asociado, que desarrollaremos con el fin de llevar a cabo el estudio, basados en las **cuatro cuestiones principales** enunciadas en la Sección 1.2 y en la propuesta del **modelo local de los organizadores**, pretendemos observar, describir, analizar, caracterizar y evaluar durante las diferentes fases (inicial, de ejecución y final) del programa y del curso-taller, los distintos aspectos, así como las modificaciones que diera lugar en relación con el **conocimiento didáctico (CD)** de un grupo de alumnos (para profesor) del 5º curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, inscritos en el Plan más general de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

En concreto, nos interesa estudiar la forma como los profesores de matemáticas de Secundaria en formación inicial introducen e integran en sus propuestas curriculares y, concretamente, en sus diseños de **unidades didáctica** sobre el **CM** específico las diferentes posibilidades curriculares del sistema formado por los tres **organizadores** mencionados anteriormente, y al cual tendrán la oportunidad de acceder a través del curso-taller que diseñaremos, programaremos e impartiremos.

Como lo hemos dicho en la introducción de este apartado, esperamos que al poder describir y caracterizar la **FD** de los profesores en formación en relación con las otras tres cuestiones centrales de este estudio (**EC**, **SR**, **CG**), hagamos aportaciones significativas y útiles sobre el desarrollo de la formación profesional, tanto en el ámbito local, como en general para la investigación sobre formación del profesorado de matemáticas y, en concreto sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones en el Currículo de Matemáticas de Educación Secundaria.

1.4.1. Hipótesis de trabajo

En los últimos años, la investigación en Educación Matemática sobre el conocimiento de los profesores, en activo y en formación, han mostrado que este conocimiento tiene un carácter diversificado, complejo y profundo, y debe ser, por tanto, necesariamente integrado en un currículo y en un plan de formación que aborden de modo simultáneo organizadores curriculares de diferente naturaleza que comprendan de algún modo estas características multidimensional y compleja del conocimiento del profesor, de tal modo que lo capacite para abordar esta complejidad teórico-práctica, la cual, de acuerdo con Rico (1995) y Llinares (1998), va más allá del simple dominio del contenido matemático.

> La complejidad del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, junto con las múltiples variables a considerar en las situaciones prácticas, hace que se generen un gran número de cuestiones relativas a los procesos de formación y a los procesos de aprender a enseñar Matemáticas. Una cuestión que subyace a esta problemática es la manera de entender los procesos de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas y las relaciones entre el conocimiento teórico y el conocimiento práctico (Llinares, 1998, p. 119).

Sin embargo, en la práctica, los profesores de matemáticas de enseñanza Secundaria, intentan realizar esta integración de forma intuitiva y basándose solamente en sus experiencias; entre otras razones, porque no les queda otra opción, ya que durante su proceso de formación inicial, la pluralidad de conocimientos indispensables para su futuro ejercicio profesional, cuando les son presentados, esto se suele hacer de una forma disociada e inconexa con respecto al contenido y el tiempo. También por el déficit formativo en materia educativa que presentan los programas institucionales de su licenciatura de origen en las Facultades de Ciencias. Recordemos lo que denominamos como la “ilusión didáctica” de los planes de formación tradicional de profesores que consiste en creer que si se le imparte a los profesores en formación unos conocimientos básicos y de formas aisladas sobre técnicas de enseñanza de las matemáticas, estos los podrán integrar y utilizar eficientemente en sus prácticas profesionales futuras.

Durante las últimas dos décadas, los resultados de las investigaciones relacionadas con la enseñanza, la comprensión de las funciones, la visualización y la pluralidad de sistemas de representación convencionales de la matemática, esto es, los sistemas verbales (lenguaje natural), numérico, gráfico y simbólico-algebraico (Shell Centre, 1986; Janvier, 1987; Leinhardt y cols., 1990; Zimmermann y Cunningham, 1991; Dubinsky y Harel, 1992; Sierpinska, 1992; Bishop, 1989; Romberg y cols., 1993; Eisenberg, 1994; Deulofeu, 1993; Duval, 1999; Hitt, 1996, 1998, 1999; Tall, 1996; Rico, Castro y Romero, 1996; Zaslavsky, 1997; Gómez y Carulla, 1999); y sobre las utilidades didácticas de las nuevas tecnologías de representación múltiple y cálculo simbólico, como las actuales calculadoras graficadoras (Fey & Hirsch, 1992; Kaput, 1992; Waits & Demana, 1992, 1995; Dunham, 1993, 1996; Demana, Schoen & Waits, 1993; Waits & Demana, 1994, 1995; Dunham & Dick, 1994; Hitt, 1998; Ruthven, 1996; Penglase y Arnold, 1996; Moreno, 1998), han aportado información significativa, cada cual por su lado, para el desarrollo del currículo y la enseñanza de las funciones, enriqueciendo de este modo las fuentes del conocimiento didáctico del profesorado de matemáticas sobre el currículo y las matemáticas escolares. Tal como lo plantean al respecto Leinhardt y cols. (1990, p. 3):

> Functions and graphs represent one of the earliest points in mathematics at which a student uses one symbolic system to expands and understand another (e.g., algebraic functions and their graphs, data patterns and their graphs, etc.)...
> One of the features of the domain that has drawn us to the study of functions and graphs is that algebraic and graphical representations are two very different symbols systems that articulate in such a way as to jointly construct and define the mathematical concept of function. Neither functions nor graphs can be treated as isolated concept (Leinhardt y cols., 1990, p. 3).

Las nociones teóricas de referencia para el plan de formación inicial que asumimos se centran en el concepto de currículo, en las bases didácticas de las matemáticas escolares y en los organizadores del currículo, nociones que desarrollaremos en el próximo capítulo. Esta fundamentación teórica ha de venir complementada por la realización adecuada o con cierta efectividad de los distintos tipos o niveles de análisis didáctico (**AD**) **–**de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación-, y estos tipos de análisis son concebidos y estructurados desde la perspectiva del **modelo local de los organizadores para el currículo de matemáticas**, que en este estudio hemos adaptado a partir de la propuesta general de carácter teórico-práctico de **los organizadores del currículo**. El modelo local de los organizadores se centra sistémicamente en tres de los elementos o campos principales del estudio: la E**C**, los **SR** y las **CG** referidos a la noción de función. El cuarto campo que enmarca conceptual y metodológicamente este estudio es la **formación inicial** (**FI**) y la **formación didáctica** (**FD**) de los futuros profesores de matemáticas.

De acuerdo con las anteriores reflexiones consideramos que un plan de formación inicial de profesores de matemáticas se secundaria que promueva la construcción del conocimiento didáctico (**CD**) en base a unas nociones teóricas de referencia y a la ejercitación en el análisis didáctico (**AD**) sobre los diferentes contenidos, contribuirá a la adquisición de una formación didáctica (**FD**) adecuada, que se reflejará en la elaboración de unidades didácticas y propuestas de materiales curriculares. Esta va a ser la **hipótesis general de trabajo** para este estudio.

1.4.2. Objetivo general

En función de las cuestiones e hipótesis anteriormente formuladas, el **objetivo general** de la investigación consiste en realizar (diseñar e implementar) y evaluar un programa de formación inicial con el propósito de estudiar (describir, interpretar, caracterizar) cómo repercute sobre las concepciones y la **FD** de los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Dada la complejidad del estudio, el programa y el curso-taller en el que se concretará en la práctica el programa, se desarrollarán específicamente en torno a unos tópicos de contenido matemático (**CM**) –ecuación, trinomio y funciones de segundo grado-; unas tecnologías informáticas –**CG** modelos TI-83 y TI-92-, y unos materiales concretos. Tal y como lo hemos venido sosteniendo, el diseño y realización del programa y el curso-taller se basará en las cuatro cuestiones principales del estudio y estará enmarcado conceptual y metodológicamente por la propuesta general y el modelo local de los organizadores para el currículo de matemáticas.

De acuerdo con esto, el trabajo lo concebimos como la realización y evaluación de un **Programa de Innovación Universitaria**, y para llevarlo a efecto, nos interesamos y proponemos estudiar la forma como los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria integran y utilizan en sus propuestas curriculares y concretamente en sus diseños y presentaciones de unidades didácticas sobre el contenido matemático seleccionado, las diferentes opciones conceptuales y metodológicas que aportan los distintos organizadores del modelo local.

Esperamos que al describir y caracterizar el conocimiento didáctico profesional de futuros profesores de matemáticas en torno a las cuestiones principales de este estudio podamos realizar aportes y profundizaciones significativas, locales o específicas sobre este conocimiento, útiles para la investigación en Educación Matemática y también para la enseñanza y aprendizaje de las funciones en el contexto de un currículo de matemáticas de Educación Secundaria, integrador, moderno, actualizado y adaptado a los avances tecnológicos y a la disponibilidad de los hallazgos de investigación disciplinar más recientes.

Más adelante, en el Capítulo III, de acuerdo con las características conceptuales y metodológicas del estudio, se presentarán los **objetivos específicos** en los que se desglosan con más detalles y con carácter más operativo este objetivo general y la hipótesis de trabajo.

II

MARCO CONCEPTUAL

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los fundamentos conceptuales desde los que abordamos esta investigación y la revisión bibliográfica llevada a cabo para la caracterización, representación y tratamiento del **problema** que se estudia.

Teniendo en cuenta la gran diversidad y complejidad de hechos que se dan cita en los contextos en los que se sitúan los fenómenos y problemas educativos de las matemáticas (Steiner, 1985), consideramos necesario que, para poder abordar y estudiar tales problemas, a estos contextos converjan integradamente diversos campos de conocimientos (Rico, 1998*a*). Esta diversidad y complejidad teórica y práctica, derivada de las múltiples fuentes referenciales y fundamentales, asociada siempre con una problemática o situación educativa determinada, generan al interior de la **Didáctica de la Matemática** diferentes perspectivas (paradigmas) teóricas y metodológicas, las cuales se reflejan y concretan a su vez, en diferentes programas y propuestas de investigación.

Tal y como lo hemos dicho en la introducción general y en el capítulo anterior, para llevar cabo este estudio nos hemos situado en el contexto del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y el problema de investigación lo hemos enfocado y delimitado desde diversos campos, desarrollos y propuestas teóricas y metodológicas. Por una parte, para atender a los principales aspectos del problema que nos interesa estudiar hemos considerado como un marco general los trabajos realizados en la línea de Investigación **Pensamiento Numérico y Algebraico** (**PNA**) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Rico, 1996; Rico, Castro y Coriat, 1996). En particular, consideramos la **propuesta de los organizadores para el currículo de matemáticas** (Rico, 1997*b*; 1998*a*), desarrollada por este Grupo de Investigación. A partir de esta propuesta hemos considerado las cuatro cuestiones centrales del estudio que hemos mencionado en el capítulo precedente y hemos desarrollado una propuesta local de los organizadores para el currículo, adaptada a nuestros intereses y necesidades, que describiremos al final de este capítulo.

A continuación procedemos a presentar los principales aspectos conceptuales y metodológicos que consideramos más relevantes para nuestro estudio. Posteriormente nos centraremos en cada una de las cuatro cuestiones centrales del estudio y describiremos la estructura y características del modelo particular de los organizadores para el currículo que hemos diseñado con tal propósito.

2.2. MARCO GENERAL

Recordemos que las cuestiones más importantes en que se basa este estudio son: El análisis de la **estructura conceptual** (**EC**) de un contenido matemático (en este estudio se trabaja sobre el concepto de función); la pluralidad y singularidad de los **sistemas de representación** (**SR**) usuales en matemáticas para el estudio de las funciones; las nuevas tecnologías de representación y más concretamente las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**) con opciones de representación múltiple y sistema de calculo simbólico integrados; la **formación didáctica** (**FD**) del profesorado de matemática, que forma parte de su **formación inicial** (**FI**), en relación con el conocimiento didáctico

(**CD**), el análisis didáctico (**AD**), las matemáticas escolares y el concepto de currículo. Estas diferentes cuestiones las enfocamos desde la perspectiva general de la propuesta de los organizadores para el currículo, ubicados en el marco también general de la línea de investigación **PNA**.

2.2.1. La línea de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico

El grupo de investigación **PNA** (**Pensamiento Numérico y Algebraico**), al cual pertenecemos los miembros del equipo que ha llevado a cabo esta investigación, ha realizado trabajos y aportes en cada uno de los campos correspondientes a las distintas **cuestiones principales del estudio**, como ya se ha puesto de manifiesto en las referencias que consideramos en el capítulo anterior. Dentro de este grupo se viene realizando desde hace mas de 30 años una reflexión teórica sobre el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas sostenida empíricamente y, simultáneamente, se han elaborado gran cantidad de materiales escolares para el trabajo en el aula matemáticas de los estudiantes de primaria y secundaria, que han permitido llevar a cabo buena parte de los estudios del grupo. Estas aportaciones han dado lugar a un marco teórico de conocimientos que se viene utilizando desde hace más de 10 años en los planes de formación inicial de profesores de matemáticas de primaria y secundaria que se desarrollan en la Universidad de Granada. Más adelante haremos referencia al **conocimiento didáctico (CD)** que sostiene esos planes de formación. Dicho **CD**, así como su elaboración y aplicación mediante el análisis didáctico (AD), tiene uno de sus soportes en **los organizadores para el currículo de matemáticas**, que también expondremos más ampliamente.

La línea de investigación **PNA** constituye una de las líneas de investigación establecidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada; forma parte de las líneas consideradas en otras universidades de la Comunidad Autónoma Andaluza, como ocurre en las universidades de Almería, Córdoba y Málaga, constituyendo conjuntamente un grupo andaluz de investigación. Este grupo está reconocido y apoyado por el Plan Andaluz de Investigación desde 1988; su código de identificación es FQM 0193 y su denominación oficial es "Didáctica de la Matemática:

Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico". Los miembros de este grupo (integrado actualmente por 34 investigadores y estudiantes de doctorado de las distintas universidades andaluzas) se integran en el grupo nacional de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La línea de investigación que el grupo PNA desarrolla en Didáctica de la Matemática versa sobre los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y utilización de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos. Siguiendo a Rico y cols. (1996) podemos afirmar que "el campo general en que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas, algebraicas y del análisis". En la URL del grupo y en diferentes documentos publicados (Rico, 1992*a*, 1996; Rico, Castro y Coriat, 1996) se puede encontrar una descripción más amplia del modelo sistémico que define y caracteriza los intereses y fundamentos metodológico y conceptuales de esta línea de investigación. La estructura de este modelo se refiere a las áreas de trabajo (sistemas y procesos numéricos), los objetivos y las fuentes o bases conceptuales diversas.

Entre los objetivos generales de trabajo que tienen relación directa con nuestro estudio mencionamos principalmente los siguientes:

- Los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica, algebraica o analítica.
- La elaboración y construcción mental de sistemas simbólicos, asi como la organización, sistematización y desarrollo de diferentes competencias cognitivas basadas en los campos conceptuales mencionados y sus representaciones.

Y entre las distintas fuentes o bases conceptuales con las que el grupo PNA se demarca e intenta cubrir conceptualmente sus diferentes áreas de trabajo y objetivos, tienen especial interés y relevancia fundamental para nuestro estudio las siguientes cuestiones:

1º.- En la línea de investigación PNA se entiende la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural, cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante; tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; y considera críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.

2º.- Su campo de reflexión comienza en la aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y continúa con el estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los conceptos básicos del análisis.

3º.- Conciben la investigación como indagación sistemática con fines epistémicos y entienden que la investigación en educación matemática debe sostenerse en la reflexión permanente sobre los problemas de la práctica escolar, aportando claves para su mejora y la implementación de innovaciones.

4º.- Consideran el carácter sistémico y complejo de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo, por ello la valoración del currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación es uno de los rasgos definitorios de esta línea de trabajo.

5º.- El estudio de las competencias cognitivas que sostienen un dominio significativo de las estructuras numéricas, de su desarrollo y mejora, junto con el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre estas estructuras, proporcionan una fundamentación psicológica a sus investigaciones.

6º.- La tensión entre las familias de problemas que dan lugar al conocimiento matemático, los sistemas de signos utilizados para representar conceptos y procedimientos, y los procesos de modelización con los cuales es posible abordar simbólicamente tales problemas, constituye un núcleo de reflexión, trabajo y estudio para este grupo de investigación.

7º.- La formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas y el aumento de la autonomía intelectual y profesional del educador matemático se consideran objetivos prioritarios para este grupo de investigación.

2.2.2. Formación Inicial de Profesores de Matemáticas

En concordancia con los propósitos generales y los diferentes principios que permiten caracterizar o delimitar un marco conceptual para los trabajos realizados en la línea del grupo de investigación PNA, se han definido y precisado algunos conceptos importantes para nuestros trabajos generales en Didáctica de la Matemática y, en particular, para este estudio. Una de estas nociones generales consiste en la concepción del futuro profesor de matemáticas como un profesional formado y reflexivo, con dominio de las matemáticas escolares, para lo cual necesita de un plan de formación inicial que le aporte los necesarios conocimientos sobre teoría curricular, nociones generales de didáctica de la matemática y principios organizadores para considerar y mostrar la pluralidad de significados del conocimiento matemático, a los efectos de ser enseñado y aprendido. Esta preparación proporciona la formación necesaria, que se adquiere mediante un proceso complejo, cuya etapa inicial pasa por el estudio y por la construcción de significados por parte del futuro profesor de matemáticas de estos diferentes tipos de conocimientos.

El Plan de Formación que reciben los alumnos que realizan su preparación como Profesores de Educación Primaria o Profesores de Matemáticas de Secundaria en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada está basado en los conocimientos teóricos, prácticos y teórico-prácticos sobre el currículo y en conceptos y nociones de didáctica de la matemática, relativas a la enseñanza, aprendizaje, dificultades, evaluación y otros, necesarias para realizar con eficacia y competencia las actividades profesionales que les son propias como profesores de matemáticas. Estos conocimientos didácticos son desarrollados y provistos en general por la disciplina Didáctica de la Matemática mediante las asignaturas de los planes de estudios vigentes de la Licenciatura de Matemáticas y de las Diplomaturas de Magisterio en las que se sustentan dichos Planes de Formación Inicial. Nuestro trabajo está vinculado con la asignatura "Didáctica de la Matemáticas en el Bachillerato" del 5º Curso de la especialidad de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas (Plan 1975), que forma parte del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de

Educación Secundaria. Esta asignatura se centra en la reflexión teórica y en actividades de diseño curricular.

2.2.3. Conocimiento didáctico y análisis didáctico

De acuerdo con Rico (1997b), el conocimiento didáctico (**CD**) constituye la principal fuente de información y el instrumento que permite al profesor de matemáticas desarrollar las distintas actividades profesionales de planificación curricular y diseño de unidades didácticas que le competen. Este conocimiento está relacionado básicamente con los siguientes tipos de cuestiones, reflexiones, análisis y prácticas asociadas:

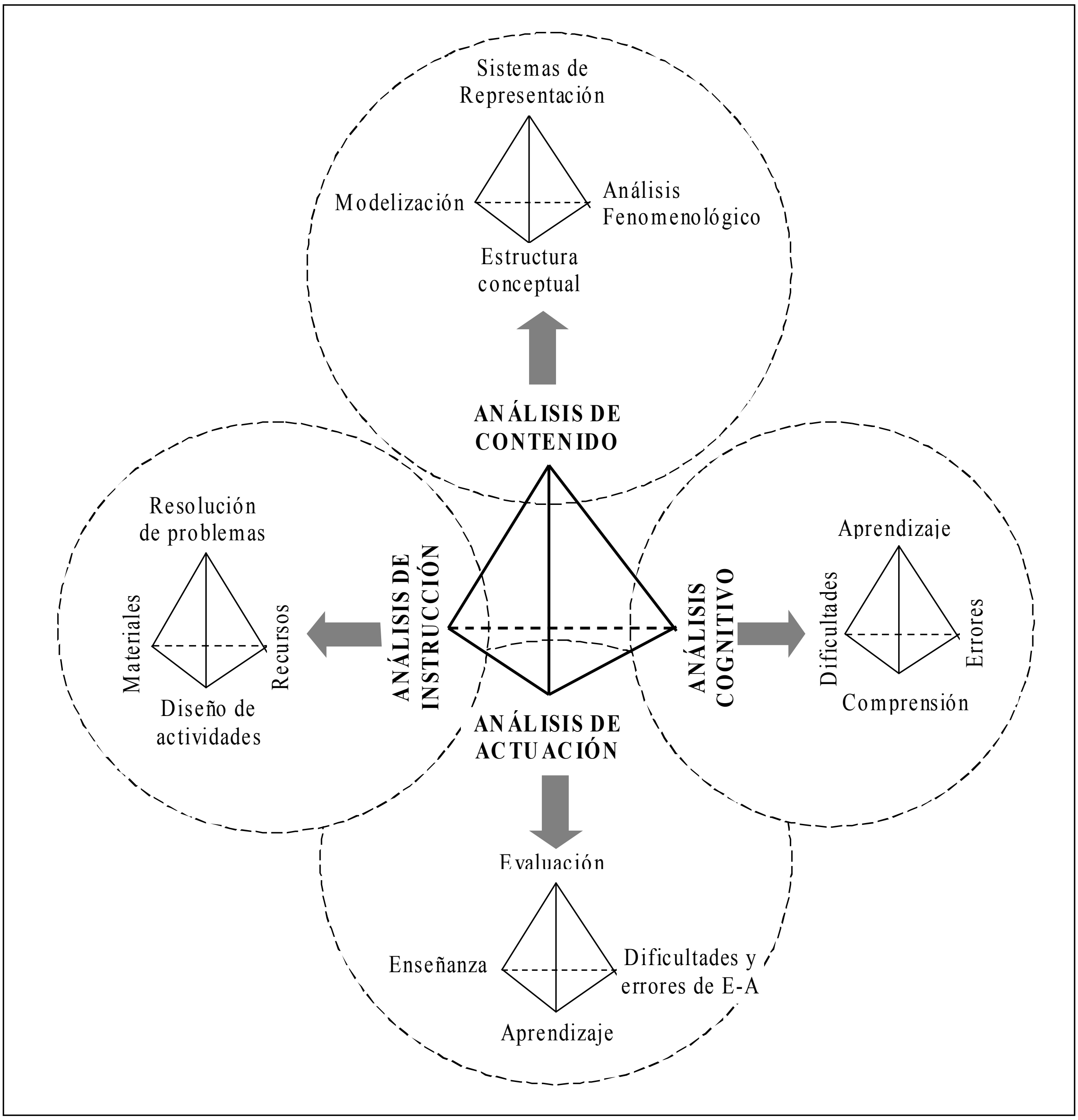
a) Una noción general, bien establecida, sobre el concepto de currículo, sobre sus dimensiones y niveles de reflexión.
b) Una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que sostienen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; igualmente sobre los principios y criterios que sostienen los procesos de evaluación.
c) Una consideración particular sobre los contenidos del currículo y su estructura conceptual ("no exclusivamente formal y técnica").
d) Una aproximación cognitiva sobre cada uno de los distintos contenidos (análisis cognitivo).
e) El análisis semiótico de los contenidos y sus implicaciones didácticas..
f) El análisis fenomenológico de los contenidos y su didáctica.
g) Análisis epistemológico e histórico.
h) Análisis y valoración de los contextos en los que se presenta cada concepto y de sus significados y usos.
g) Revisión y reflexión sobre los materiales, recursos y tecnologías con los que se pueden considerar y trabajar estos contenidos y conceptos.

Gómez y Rico (2002) clasifican los diferentes tipos de conocimientos anteriores en las tres categorías siguientes: "(i) noción y contenidos del currículo; (ii) nociones de didáctica de la matemática relevantes para el tópico, situación o problema; (iii) integración de (i) y (ii) en una estructura matemática particular para efectos de realizar el **análisis didáctico**."

El **análisis didáctico** (**AD**) lo postulan "como la descripción de la manera 'ideal' de realizar actividades de diseño curricular a nivel local", y caracterizan el **CD** como la integración de (i), (ii) y (iii) y como "un constructo psicológico que (a) tiene un conocimiento disciplinar de referencia (en este caso, la Didáctica de la Matemática); (b) tiene una utilidad práctica (diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas); (c) su puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica, la del análisis didáctico, ... que es la expresión local del diseño curricular global y es el medio gracias al cual es posible pasar de diseños centrados en una secuenciación de contenidos a diseños locales que tienen en cuenta las distintas dimensiones".

En la Figura 2.1, (adaptada de Gómez & Rico, 2002) presentamos esquemáticamente la organización estructural de las principales nociones y cuestiones que se dan cita en el **AD**. El esquema de la figura intenta enfatizar el carácter sistémico y dinámico de la propuesta de análisis y la relevancia de las conexiones entre las diferentes modalidades de análisis y sus múltiples interrelaciones con la variedad de componentes y con los organizadores del currículo. Las actividades de diseño curricular se adecuan al marco teórico mencionado y al modelo local considerado, y se estructuran según el esquema que muestra la figura. Para una descripción más amplia del modelo, sus contenidos, interrelaciones y funcionamiento remitimos al lector a la fuente citada.

Figura 2.1.
Estructura esquemática de la organización y contenidos del análisis didáctico



2.2.4. Concepto de currículo

Una de las nociones que resulta básica y fundamental en este estudio es la de **currículo** (Rico, 1997*b*; 1998*a*). Es fundamental porque es la noción en la cual se sustenta el diseño del Plan y a la vez es un concepto básico para los trabajos y propuestas desarrolladas en la línea de investigación PNA. De acuerdo con este autor y en términos generales, por **currículo** se entiende el conjunto de conocimientos y actividades que estructuran y se estructuran en un plan integral de formación, el cual contempla, explícita o implícitamente, los siguientes elementos:

1. El conjunto de personas a formar (profesores y alumnos).
2. El tipo de formación que se quiere proporcionar.
3. La institución social en la que se lleva a cabo la formación.
4. Las necesidades que se quieren cubrir y
5. Los mecanismos de control y valoración.

Además, continuando con la caracterización de este concepto, este autor plantea que las funciones del currículo de matemáticas (de Educación Secundaria) deben consistir en ofrecer propuestas concretas y sistemáticas sobre:

- Modos de entender, caracterizar y trabajar con el conocimiento matemático.
- Concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas: ¿Cómo se produce? ¿Cómo aprenden los profesores y alumnos?
- Concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas: ¿En qué consiste la enseñanza de la matemática?
- Maneras de valorar y controlar los conocimientos y procesos de los aprendizajes alcanzados.

La necesidad de redefinir y precisar él concepto de currículo Rico (1998*a*) la justifica argumentando que bajo la concepción tradicional de currículo y los documentos que le sirven de soporte no es posible diseñar, planificar y desarrollar efectivamente los temas y unidades didácticas que el profesor necesita para realizar su labor profesional. Afirma que:

> Esto es así puesto que es necesario ofrecer criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos, criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula, criterios sobre prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos, y criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores, para cada una de las unidades del currículo de matemáticas (Rico, 1998).

Bajo esta nueva concepción del currículo se infiere que para que el futuro profesor obtenga una formación profesional adecuada que le permita concretar las funciones del currículo y realizar los diferentes tipos de análisis y actividades didácticas que su labor profesional le exigen, la preparación debe hacerse de manera sistémica y estructurada a través de planes concretos (locales y específicos) de formación profesional rigurosa y debidamente diseñados, planificados, implementados y evaluados empíricamente.

2.2.5. Estructura conceptual de los contenidos matemáticos escolares

> Mathematical concepts draw their meaning from a variety of situations and each situation cannot usually be analyzed with the help of just one concept but rather requires several of them. This is the reason we have to study the learning and teaching of conceptual fields, that is, large sets of situations whose analysis and treatment require several kinds of concepts, procedures, and symbolic representations that are connected with one another (Vergnaud, 1990).

El Diseño Curricular Base (DCB, MEC, 1989) anticipa y la normativa posterior para el currículo derivada de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo Español (LOGSE, R.D. 1006, 1007, 1344 y 1345, BOE, 1991) propone estructurar los contenidos (de matemáticas) del currículo de primaria y secundaria en cuatro apartados: hechos, conceptos, procedimientos y principios, y cinco categorías relacionales que pueden darse entre los distintos elementos de estas tipologías de contenidos. Estas ideas están tomadas de las investigaciones que sirvieron de fundamento al informe Cockcrofk (1985) y están documentados por Bell y otros (1983). Coll (1988), uno de los principales inspiradores de la reforma derivada de la LOGSE, basándose en la teoría cognitiva de la elaboración, incorpora esta clasificación al currículo español de la década de los 80. Estas propuestas plantean que esas tipologías de conocimientos son pertinentes con las decisiones instruccionales, o sea, para la organización y secuenciación de la enseñanza -relaciones de requisitos de aprendizaje, relaciones de procedimiento, relaciones de organización y coordinación, relaciones de principios y relaciones de atributos-.

Desde esta perspectiva cognitiva, y enfocando específicamente el conocimiento matemático, muchos autores proponen concebir este tipo de conocimiento estructurado en tres campos principales y complementarios: **conceptual, procedimental y actitudinal** (Hiebert, Lefevre, 1986; Coll y otros (1992); Rico, 1992, entre otros). En nuestro estudio preferimos llamar a cada uno de estos campos **dimensiones del conocimiento**, para señalar y enfatizar el hecho de que estos tipo de conocimiento no son disociables, salvo para efectos de su análisis. De esta forma nos referiremos, en términos generales, a la estructura conceptual (**EC**) del conocimiento matemático escolar. La **EC** de un determinado contenido, puesto de manifiesto mediante un proceso de análisis, se considera en este estudio como uno de los organizadores del currículo para las matemáticas escolares

De acuerdo con los autores mencionados anteriormente y siguiendo a Fernández y Rico (1989), estas maneras de caracterizar el conocimiento, que en nuestro caso se refiere en particular al contenido matemático y a las tecnologías con las cuales vamos a trabajar, nos permite considerarlo, desde la perspectiva conceptual, como "un conocimiento rico en relaciones" y, desde la perspectiva procedimental, como "un sistema dinámico de producción que se ejecuta apropiadamente gracias a que moviliza necesariamente los sistemas conceptuales" y representacionales asociados. Estas movilizaciones cognitivas de **procedimientos** y **conceptos** se llevan a cabo merced a determinadas **actitudes** positivas o favorables hacia los mismos, o en su defecto, se dificultan u obstaculizan. Porque, no sólo en el conocimiento procedimental hay unidades de información conectadas por relaciones, sino que "actúan sobre la base que proporciona una red de datos básicos, conceptos y estructuras conceptuales con diferentes niveles inclusivos de complejidad" (Fernández y Rico, 1989). De lo contrario, no podrían constituirse en aprendizajes significativos. En la Figura 2.2, adaptada de estos autores se ilustra de manera esquemática, la complejidad de las dimensiones del conocimiento matemático, con sus diferentes niveles, aspectos y relaciones.

Figura 2.2.
Dimensiones, niveles y relaciones del conocimiento matemático

C O N O C I M I E N T O	M A T E M Á T I C O
↓ D I M E N S I Ó N	A C T I T U D I N A L ↓
↓ **DIMENSIÓN CONCEPTUAL** →	← **DIMENSIÓN PROCEDIMENTAL** ↓
Estructuras conceptuales →	← Estrategias
Conceptos →	← Razonamientos
Hechos →	← Destrezas

En relación con los tópicos del contenido matemático específico sobre el cual trabajamos en este estudio, su **EC** se articula según estas dimensiones del conocimiento matemático referidas, en términos generales, a los siguientes hechos, conceptos, procedimientos y actitudes:

Hechos y conceptos: Relaciones funcionales. Relaciones funcionales expresadas mediante variables. Representaciones, gráficas, numéricas y simbólica (algebraica). Notaciones. Intersección con el eje, los ceros o raíces y el vértice. Características y propiedades locales y globales de las gráficas de funciones. Introducción y motivación (fenomenológica didáctica) de la ecuación y la función cuadrática. Familias de parábolas funcionales y de funciones cuadráticas. Principales propiedades gráficas y algebraicas de la función cuadrática. Funciones racionales cuadráticas.

Procedimientos: Utilización e interpretación de distintos tipos de representación (verbal, gráfico, numérico y simbólico algebraico). Determinar las características y propiedades fundamentales de una función. Obtener un modelo funcional para un fenómeno o situación determinada e interpretarlo a partir del modelo construido. Distinguir distintos tipos de funciones de acuerdo con su ley y sus representaciones. Determinar las propiedades principales de una función mediante el análisis articulado de sus representaciones. Estudio de las relaciones entre los distintos parámetros o coeficientes de expresiones algebraicas (estándares y canónicas) y las gráficas correspondiente. Estudio de familias de funciones cuadráticas.

Actitudes: En este estudio consideraremos los aspectos sobre esta dimensión actitudinal del conocimiento matemático y sus múltiples representaciones en relación con las tecnologías (calculadoras graficadoras) que emplearemos durante su desarrollo. De acuerdo con esto, nos interesaremos, por ejemplo, en las actitudes hacia las calculadoras en relación con sus efectos motivacionales hacia el conocimiento matemático y el uso interrelacionado de múltiples tipo de representación; actitudes en relación con las posibilidades de visualización y modelización de los conocimientos matemáticos sobre las funciones (cuadráticas) y problemas asociados; actitudes en relación con el aprendizaje de las funciones en general y las funciones cuadráticas en particular vía el uso de calculadoras graficadoras.

Estos diferentes aspectos dimensionales de la EC del contenido matemático que nos ocupa se pondrán de manifiesto más adelante cuando presentemos las definiciones, mapas conceptuales y otras producciones de los alumnos para profesor participantes en el programa de formación y el curso-taller.

2.2.6. Nociones básicas sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación

Estas nociones están en concordancia y se complementan con los principios y orientaciones didácticas ("principios metodológicos") establecidos en el currículo oficial del MEC para la Educación Secundaria Obligatoria (LO 1/1990), las cuales se recogen en los cuatro grandes apartados siguientes (MEC, 1992):

- ✓ Principios de aprendizaje e intervención educativa.
- ✓ Aspectos organizativos.
- ✓ Orientaciones para la evaluación.
- ✓ Orientación educativa y profesional.

Todos los planteamiento curriculares y didácticos anteriormente mencionados, en el ámbito local y particular del estudio se concretan en las propuestas específicas del Plan de Formación Inicial del Departamento y en el diseño, planificación, análisis y evaluación del programa y del curso-taller respectivo. Precisamente, una de las componentes y objetivos esenciales de currículo, concebido como un plan sistémico de formación fundamentado en y por las propuestas de los organizadores y del análisis didáctico, consiste en situar los distintos elementos que las conforman en el contexto normativo oficial. Para ello, remite a la revisión y análisis de los documentos oficiales, tales como la LOGSE (Ley orgánica 1/1990 de ordenación general del sistema educativo español), los reales decretos RD 1007/1991 y 1178/1992; y el Diseño Curricular de Matemáticas para la Educación Secundaria 12-16 de 1989 de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (Rico, 1992*a*; Flores, 1998*a*). Estas cuestiones son importantes, no sólo en relación con el conocimiento necesario de los fines, objetivos, principios y orientaciones prescritas en la Ley, sino que también, profesionalmente el futuro profesor tiene que actuar en concordancia con estos marcos conceptuales y metodológicos, y conocer su naturaleza, justificaciones y fundamentos a la hora de posicionarse profesional, crítica y autónomamente frente a ellos y ante las propuestas curriculares, de cambio y mejora asociadas con ellos que en su momento se planteen.

El plan de Formación Inicial del Departamento se concreta en sus asignaturas. Uno de los fines generales más importantes de la asignatura de Didáctica de la Matemática consiste en "conseguir una visión global del campo de la Didáctica de la Matemática y articular el conocimiento matemático sobre los contenidos de la educación secundaria obligatoria y bachillerato a través de una reflexión didáctica sistemática" (Rico, 1992*a*). Entre los temas y nociones de Didáctica de la Matemática que se consideran para "organizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria y bachillerato" tienen especial relevancia para nosotros las siguientes:

- ✓ Fundamentos de teoría curricular: Relación enseñanza de las matemáticas y sistema educativo; contenidos y objetivos del currículo de matemáticas en ESO y Bachillerato.
- ✓ Nociones generales sobre teorías de aprendizaje de las matemáticas.
- ✓ Elementos para la reflexión y sistematización de los procesos de enseñanza de las matemáticas: Estilos de enseñanza, métodos, medios, materiales y recursos; la resolución de problemas como estrategia didáctica; criterios y pautas de evaluación de la enseñanza y aprendizajes de las matemáticas.

Entre la variedad de tópicos de contenido matemático propuestos (21) en estas asignaturas para realizar procedimientos prácticos relacionados con el diseño de unidades, enseñanza y análisis didáctico, centramos nuestra atención en los siguientes tópicos:

- ✓ Iniciación al Álgebra;
- ✓ Estudio de las funciones y de sus representaciones;
- ✓ Funciones límites y continuidad;
- ✓ Derivación;
- ✓ Resolución de ecuaciones;
- ✓ Transformaciones geométricas, y
- ✓ Geometría Analítica en el plano.

Un desarrollo más completo y complementario sobre estos principios y temas de didáctica de la matemática se pueden encontrar en Rico (1992*a*) y Flores (1998*a*). En particular, en Rico (1992*a*: Capítulo III) se pueden encontrar además, resultados de análisis de contenido sobre los distintos temas o tópicos que nos interesan. Estos análisis están basados en los principios y nociones de didáctica mencionados anteriormente, teniendo como marco fundamental en el trasfondo las propuestas sobre conocimiento didáctico, análisis didáctico y los organizadores para el currículo de matemáticas de la educación secundaria y bachillerato. Estos trabajos los hemos tenido muy en cuenta para realizar los análisis y diseñar, planificar y evaluar el programa y las distintas generaciones de curso-taller.

En resumen, las principales nociones de didáctica de la matemática que orientan y fundamentan este estudio y en las que nos basamos para realizar (diseñar, planificar e implementar), analizar y evaluar el programa y el curso taller asociado a través de sus respectivas generaciones las enunciamos a continuación organizadas de acuerdo con las distintas funciones del currículo:

- Modos de concebir, entender, caracterizar, trabajar y relacionarse con el conocimiento matemático. Criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos matemáticos. Desde la perspectiva de las propuestas oficiales (DCB-MEC, 1989; MEC, 1992) se defiende una concepción acerca del conocimiento matemático como un sistema u organismo dinámico “en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas práctico".

Pero, de todas maneras, se sabe por las investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el conocimiento y pensamiento de los profesores que la concepción (epistemológica) que un profesor tenga sobre la naturaleza del conocimiento matemático determina significativamente sus propuestas curriculares y didácticas. "Según sea la fundamentación epistemológica que atribuya al conocimiento matemático, así se planteará el aprendizaje [y la enseñanza] de sus alumnos como descubrimiento, una invención, una construcción personal, una interiorización de códigos y reglas o una asimilación de patrones y pautas culturales, con mayor o menor grado de pasividad por parte de los sujetos que aprenden y enfatizando una clase de actividades sobre otras" (Rico, 1992*a*).

- Concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas. ¿Cómo se produce? ¿Cómo aprenden los estudiantes para profesores los distintos contenidos matemáticos, tecnológicos y didácticos? Para abordar estas cuestiones consideramos necesario considerar y realizar una reflexión sobre diversos apartados: Criterios sobre prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos. Resolución de problemas, comprensión y aprendizaje de las matemáticas. Nuevas tecnologías y aprendizaje de las matemáticas. Hemos señalado anteriormente que las consideraciones epistemológicas acerca de la naturaleza del conocimiento matemático que un profesor tiene son determinantes para sus sistemas de ideas, creencias, actitudes (concepciones) y propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza. Pero estas no son las únicas condicionantes de sus propuestas y prácticas curriculares y didácticas. También influyen significativamente sus concepciones e intuiciones sobre los procesos psicológicos, cognitivos y sociales de aprendizaje.

Asumimos la posición **constructivista** que sustenta el currículo de matemáticas derivado de los documentos curriculares oficiales (DCB-MEC, 1989; LOGSE-MEC, 1991; MEC, 1992). "Es preciso, por tanto, que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático" (MEC, 1992). En estas propuestas se caracteriza el desarrollo del aprendizaje del conocimiento matemático y del conocimiento matemático mismo como procesos sociales y constructivos, en continua evolución, interrelacionados con otros tipos de conocimientos, a través de la resolución de determinados problemas prácticos o aplicados. Estos procesos constructivos se basan en distintos tipos complementarios de funciones (formativa en relación con las competencias intelectuales e instrumental) y razonamientos, como el empírico-inductivo, el deductivo y la abstracción. La etapa intuitiva de ensayo y error, tanteos previos, ejemplos y contraejemplos, solución de casos particulares, formulación de conjeturas al modificar las condiciones iniciales y posterior prueba, intentos de generalización y resolución de problemas gradualmente más generales y difíciles, constituyen "auténticas pistas" para construir proposiciones, conocimientos y teorías. La deducción formal y la utilización de dicha formalización suelen aparecer posteriormente, gracias a la capacidad de los seres humanos para establecer relaciones y abstracciones selectivas a partir de los objetos sobre los cuales actúa.

Bajo estos criterios constructivistas, es necesario tener en cuenta en las propuestas curriculares sobre los contenidos de aprendizaje de una determinada estructura conceptual (EC) matemática, la experiencia y nivel de competencia cognitiva de los estudiantes, sus concepciones, dificultades, errores e ideas imprecisas y desarrollarlas en un ambiente compartido de resolución de problemas, utilizando diversos contenidos y recursos cognitivos, didácticos y tecnológicos. Además, es necesario tener en cuenta que:

> La construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares...
>
> La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y de reflexionar sobre ella obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos (MEC, 1989, 481).

Estos documentos oficiales, también plantean la conveniencia de considerar las nuevas tecnologías como recursos didácticos, lo que vendría a introducir otra dimensión en las perspectivas utilitarias y formativas complementarias de las matemáticas escolares. Teniendo en cuenta el carácter constructivo de los procesos de aprendizaje del conocimiento matemático, advierten que su incorporación en el currículo "ha de tener repercusiones" sobre este, "no sólo en cuanto a la manera de enseñar las matemáticas, sino también en cuanto a la propia selección de los contenidos"; algunos de los cuales ganarán relevancia (simulaciones, visualizaciones, resolución de problemas y representaciones gráficas difíciles, conceptos y procedimientos complejos) y otros la perderán (aprendizaje mecánico de algorítmos, secuencias de operaciones reiterativas, realización de cálculos extensos que podrían obstaculizar la reflexión constructiva del conocimiento).

> Es necesario, por lo tanto, invertir la tendencia habitual del sistema educativo a permanecer de espaldas a las innovaciones tecnológicas. El ejemplo de la calculadora es significativo: se sigue ignorando o incluso prohibiendo su presencia en la enseñanza de las matemáticas cuando, por su bajo coste y por la utilización que de ella se puede hacer, debería ser objetos de especial interés, además de contemplarse como instrumentos pedagógico y didáctico de primer orden (MEC, 1989, p. 485).

De tal forma que, para realizar, analizar y evaluar nuestras propuestas curriculares y las propuestas didácticas de los alumnos hemos tenido en cuenta las distintas concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, los distintos niveles de relación con el conocimiento –subjetivo, intersubjetivo, objetivo no autónomo y objetivo autónomo-, así como los siguientes indicadores de problemas durante los procesos de construcción del conocimiento matemático, adaptados a partir de los siguientes, señalados por Rico (1992*a*): (i) contraposición entre la habilidad de ejecución y resolución de actividades y tareas y la comprensión de los conceptos y procedimientos implicados; (ii) relación entre lo enseñado y lo utilizado por parte de los estudiantes en sus participaciones y producciones.

- Concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas. ¿En qué consiste la enseñanza de la matemática? ¿Cómo se lleva a cabo la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuál es el papel del profesor? ¿Qué tipo de actividades de introducción, motivación y desarrollo del contenido matemático propone? Para intentar dar respuestas a estos interrogantes consideramos diversas aproximaciones relacionadas con: Criterios para la organización, desarrollo, gestión y control del trabajo en el aula. La resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Temporalización. Materiales y recursos. Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas. La perspectiva social y constructivista en la enseñanza de las matemáticas descrita anteriormente.

- Maneras de valorar o evaluar los conocimientos matemáticos, tecnológicos y didácticos enseñados o aprendidos y los correspondientes procesos de enseñanza y aprendizaje. Criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de las dificultades y errores. Creencias y actitudes de los futuros profesores sobre la evaluación. El papel de las nuevas tecnologías en la evaluación.

2.2.7. Matemáticas escolares y unidades didácticas

Para concretar en la práctica las directrices curriculares y didácticas es necesario diseñar y desarrollar un conjunto de actividades, estructuradas en una **unidad didáctica**. Esta unidad está dirigida a un grupo concreto de alumnos y se refiere a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto determinado. Para realizarla, el profesor necesita conocer y dominar ciertos conocimientos y ciertas técnicas e instrumentos fundamentales y útiles relativo a este contenido y este contexto (Coll, 1988; Rico 1998*a*), así como sobre los procesos asociados de enseñanza, aprendizaje y evaluación. En general, la realización de una unidad didáctica consiste en la selección y organización de los contenidos; el desarrollo y control de los procesos de enseñanza; la observación y seguimiento de los procesos de construcción y adquisición del conocimiento, de modificación y evolución de los esquemas o estructuras cognitivas, y de asignación y comprensión de significados por parte de los alumnos; y se refiere también, al análisis, valoración y evaluación de todos los procesos anteriores, logros y resultados; y al tratamiento de los errores y dificultades relacionados con todo ello. De esta manera es como el profesor reflexiona sobre las matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas a los efectos de ser enseñadas y aprendidas. En síntesis, “una unidad didáctica es una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia y Rico, 2001, p. 87).

2.2.8. Los organizadores del currículo de matemáticas

El diseño, planificación y desarrollo de una unidad didáctica no se reduce a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre el tema matemático en cuestión, “sino que incorpora otras informaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y lo enriquecen” (Segovia y Rico, 2001, p. 88). Para realizar esta propuesta de trabajo es necesario llevar a cabo un proceso de análisis riguroso y detallado, que hemos denominado **análisis didáctico** (**AD**). El análisis didáctico se centra en un contenido y un contexto determinados, con miras tanto al diseño de actividades o unidades de enseñanza-aprendizaje, como al desarrollo de proyectos curriculares o de investigación. Rico (1992; 1997*a,b*; 1998*a*) y Segovia y Rico (2001), proponen como elemento teórico y metodológico, mediador, articulador y facilitador de este análisis, la noción de “**organizadores del currículo de matemáticas**” (**OC**). Los organizadores del currículo son sistemas de conocimientos que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos escolares.

Tanto la concepción de currículo como la de organizadores constituyen respuestas que introducen mejoras a las propuestas generales de organización disciplinar y cognitiva, características de las concepciones tradicionales del currículo. La nueva concepción de currículo de matemáticas, de carácter local, sistémico y funcional, exige considerar nuevos organizadores y nuevas maneras de procesamiento y construcción de significados para el conocimiento matemático escolar. Es de este modo como surge la propuesta de los **“organizadores del currículo de matemáticas”**. En particular, la propuesta de los organizadores proporcionan a la comunidad de educadores matemáticos un marco teórico y metodológico más amplio en su generalidad, pero específico en los aspectos profesionales relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas. Rico (1997*a*) resume las principales características de la propuesta de los organizadores de la siguiente manera:

> Vamos a llamar *organizadores* a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Hablamos así de organizadores del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y comprensión del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión, para producir nuevos significados. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. Los organizadores deben tener una base disciplinar adecuada que permita su tratamiento objetivo. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997*a*, p. 45).

2.3. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En términos generales, en el capítulo anterior al definir y delimitar el problema de investigación planteamos, por una parte, como **hipótesis general de trabajo**, que si los futuros profesores de matemáticas construyen su conocimiento didáctico (**CD**) sobre la base de un análisis didáctico (**AD**) adecuado, esto contribuirá a modificar y mejorar su prácticas profesionales sobre las matemáticas escolares, y que esto se reflejará, de alguna manera concreta, en sus propuestas y producciones curriculares y didácticas. Por otra parte y de acuerdo con esta hipótesis de trabajo, planteamos como objetivo general de la investigación realizar y evaluar un programa de formación inicial con el propósito de estudiar la forma como repercute sobre las concepciones y formación didáctica de los futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria en relación con la estructura conceptual (EC) sobre el contenido matemático en cuestión y su CD base de su FD.

En el apartado anterior hemos hecho una revisión de las principales cuestiones conceptuales que enmarcan nuestro problema de investigación y hemos podido apreciar la gran complejidad que cada una de ellas y en conjunto entrañan. Para abordar de forma apropiada esta complejidad y como fundamento metodológico del estudio que nos proponemos realizar, hemos diseñado un **programa de formación inicial** que pretendemos implantar, analizar y evaluar con tales propósitos y para el logro de tales objetivos. En este apartado y a continuación nos proponemos concretar toda esta complejidad de cuestiones o aspectos tratados en el apartado anterior de cara a nuestro problema de investigación.

A pesar de la especificidad de las nuevas concepciones del currículo de matemáticas y de los organizadores, los requerimientos al profesorado y a sus formadores se ven a la vez incrementadas en su complejidad, debido a su carácter teórico-práctico, multidimensional o integrado y sistémico, y a la falta de experiencia y condiciones por parte de los profesores para diseñar unidades didácticas en base a estos modos de significar el conocimiento matemático y a la inexistencia de bibliografía y documentos específicos, así como de modelos que ejemplifiquen las nuevas propuestas. En fin, la carencia de medios eficientes y permanentes de información y de la infraestructura básica y necesaria al respecto. Sin embargo, esto mismo constituye un argumento a favor de la necesidad de profesionalización y formación didáctica del profesorado de matemáticas.

Precisamente, estos aparentes inconvenientes y dificultades, relacionados con dicha complejidad curricular, didáctica y analítica, son los que hemos tomado como un reto y motivación para someterlos a un estudio empírico de orientación evaluativa en esta investigación. Nos proponemos desarrollar un curso abreviado de formación inicial para profesores de matemáticas centrado en el análisis didáctico y orientado al diseño de unidades didácticas para el aula de secundaria. Para ello restringimos y damos una carácter local a la propuesta general de los organizadores centrándonos en unos conceptos (contenido matemático) específicos para unos niveles concretos: función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática en el segundo ciclo de la educación secundaria. Igualmente restringimos la diversidad de elementos organizadores a tres principales: la estructura conceptual (**EC**), los sistemas de representación (**SR**) asociados a la noción de función y las calculadoras graficadoras (**CG**) modelos TI-83 y TI-92 como elemento mediador principal. El análisis didáctico derivado va a quedar mediado y estructurado por esta terna: la **EC**, los **SR** y las **CG**. Es por ello que nos referimos a la propuesta de trabajo como **modelo local y triádico de los organizadores para el currículo de matemáticas**. Este modelo es el que básicamente se utiliza en el diseño metodológico de este trabajo y para la planificación del programa de formación y el curso-taller que se ha desarrollado para la parte empírica del estudio.

2.3.1. Modelos locales

De acuerdo con nuestras perspectivas e intereses, las consideraciones del apartado 2.2 anterior tienen un carácter general y están relacionadas con las siguientes cuestiones: Un diseño curricular global; un diseño didáctico general de actividades y unidades para la enseñanza-aprendizaje; y cierto tipo de conocimiento didáctico por parte del profesor que le permita realizar y llevar a la práctica estos diseños, actividades y análisis. Todo esto, proyectado a nuestro tema de investigación, se concreta y particulariza en un **modelo local** referido a:

- ✓ Un diseño curricular local: Nos ubicamos en el Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ya mencionado con sus componentes teóricos; el aspecto clave del **programa** de formación que nos proponemos evaluar en particular son las competencias que los estudiantes para profesor que siguen este curso logran en el diseño de actividades y unidades didácticas;
- ✓ Una estructura conceptual referida a un contenido matemático específico: Elegimos el concepto de función en general y el de función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática en particular, como tópicos en los que

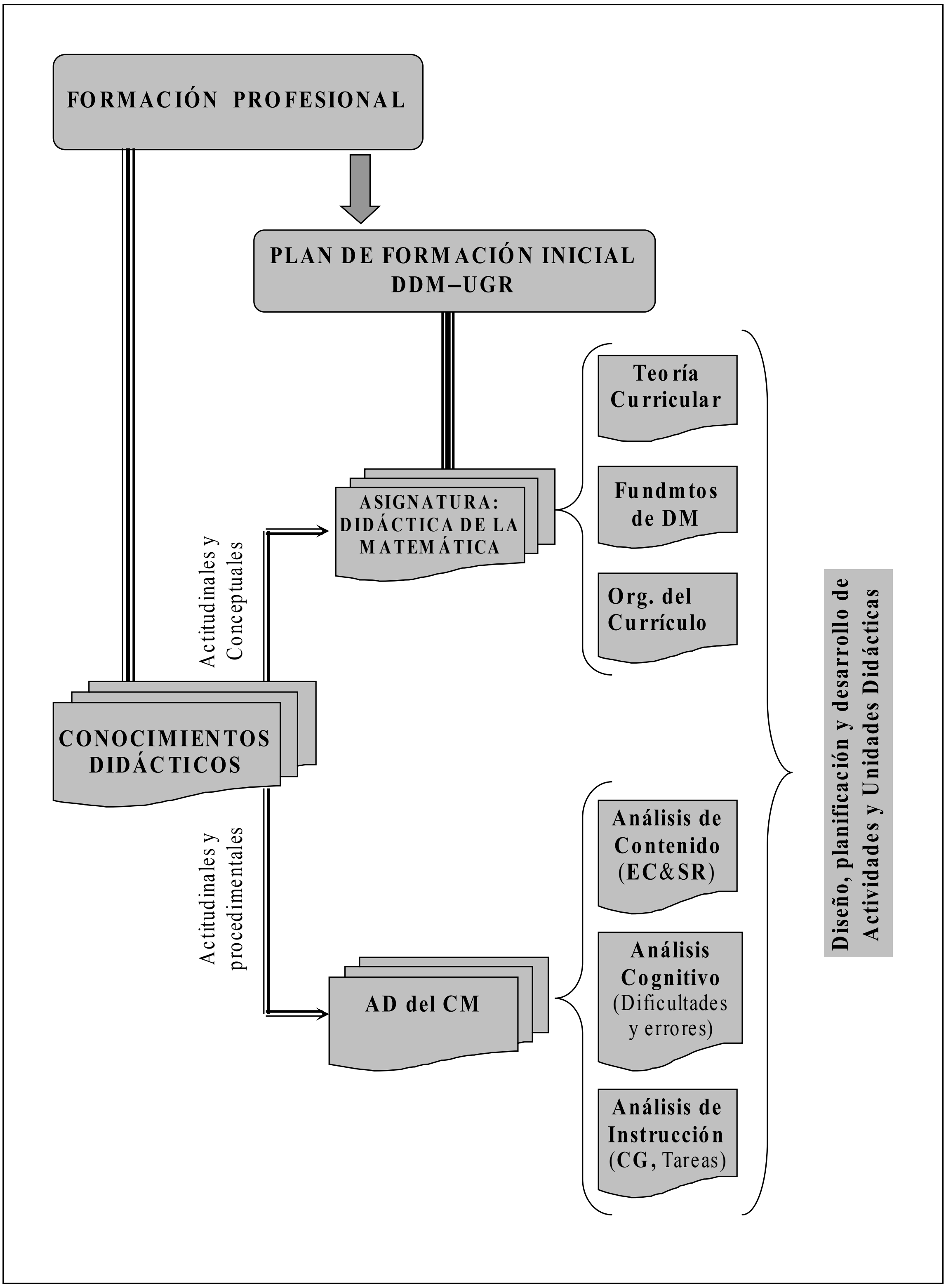
centrar el estudio, considerados desde un punto de vista escolar y ubicados el marco curricular de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), en concreto en su Segundo Ciclo;

- ✓ Los conocimientos didácticos provistos por las asignatura de Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, y que en nuestro caso son necesarios para y se concretan en el diseño y planificación de actividades didácticas sobre la función cuadrática y el trinomio de segundo grado en el segundo ciclo de secundaria y los correspondientes sistemas de representación, basadas en el uso de las modernas calculadoras graficadoras.

Precisamente, el diseño de esta investigación lo hemos realizado con el propósito de contrastar empíricamente la viabilidad del plan de formación descrito, mediante el análisis de las competencias, habilidades y conocimientos didácticos que desarrollan los alumnos para profesor que siguen el mencionado plan. Nos interesa establecer el desarrollo y utilización de los conocimientos impartidos para realizar los análisis didácticos y las diferentes actividades curriculares y didácticas que hemos mencionado anteriormente. En especial, en relación con los conocimientos actitudinales, procedimentales y conceptuales referidos a los distintos contenidos matemático-representacional y tecnológico.

En la Figura 2.3 presentamos esquemáticamente la estructura y relaciones del modelo local descrito anteriormente, concebido como una adaptación para este estudio de las propuestas hechas en el seno de la línea de investigación PNA (Rico, 1997*b*; Gómez y Rico, 2002) y en el marco curricular del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Como lo hemos dicho anteriormente, este Plan comprende dos asignaturas pero nosotros nos hemos ocupado solamente de una de ellas: “Didáctica de la Matemática en el Bachillerato”.

Figura 2.3.
Estructura y relaciones del modelo local y parcial de conocimiento y análisis didácticos



En síntesis, en base al diseño curricular local y a los conocimientos sobre el contenido matemático específico y sobre su enseñanza, el profesor determinará y seleccionará unos objetivos y unos aspectos del contenido, realizará ciertos análisis conceptual, cognitivo y de instrucción, y diseñará, planificará y producirá unas actividades didácticas como propuestas para la enseñanza-aprendizaje de estos contenidos matemáticos, basadas en la descripción y caracterización de su **EC**, en la pluralidad e interrelación de los **SR** y en las utilidades tecnológicas y didácticas de las **CG** utilizadas en el estudio.

2.3.2. El modelo local-triádico de los organizadores

El modelo local y triádico de los organizadores para el currículo de matemáticas lo concebimos como una unidad compleja y sistémica. Constituye un marco teórico-práctico (conceptual y metodológico) organizador que sostiene el análisis didáctico necesario para las planificaciones y desarrollos de las propuestas curriculares y producciones didácticas de los profesores y alumnos para profesor. Se refiere específicamente a un contexto, unos dominios o estructuras conceptuales matemáticas y unos recursos y tecnologías concretos. En conformidad con la propuesta general de los organizadores (Rico, 1997*a*, p. 39-59; 1998, p. 32-38) el modelo local-triádico considera tres de forma restringidas (**EC**, **SR**, **CG**), que constituyen modos de entender el conocimiento profesional del profesor y de dotar de significado con fines de análisis a sus producciones curriculares o didácticas. En pocas palabras el modelo local-triádico de los organizadores impone una estructura y un tipo de funcionamiento más concreto o práctico del currículo particular en relación con el cual se trabaja.

En particular, en este estudio nos interesa caracterizar, en términos del **modelo local y triádico**, un tipo específico de conocimiento matemático-escolar, de conocimiento tecnológico (**CT**) y de conocimiento didáctico (**CD**). Estos conocimientos serán enfatizados en un programa y su correspondiente curso-taller de formación inicial de profesores con el propósito de estudiar y valorar las maneras como la construcción de estos conocimientos influyen o transforman las concepciones curriculares y didácticas de los profesores en formación. Esperamos que los nuevos conocimientos se reflejen en las estrategias de planificación curricular, análisis didáctico y producciones profesionales, tales como diseño y planificación de unidades didácticas y demás actividades de enseñanza o "comunes del acto de enseñar": comprensión, reflexión, transformación o cambio, instrucción y evaluación. En concreto, el modelo local-triádico y restringido de los organizadores considera, principal y específicamente, los tres tipos de contenidos siguientes:

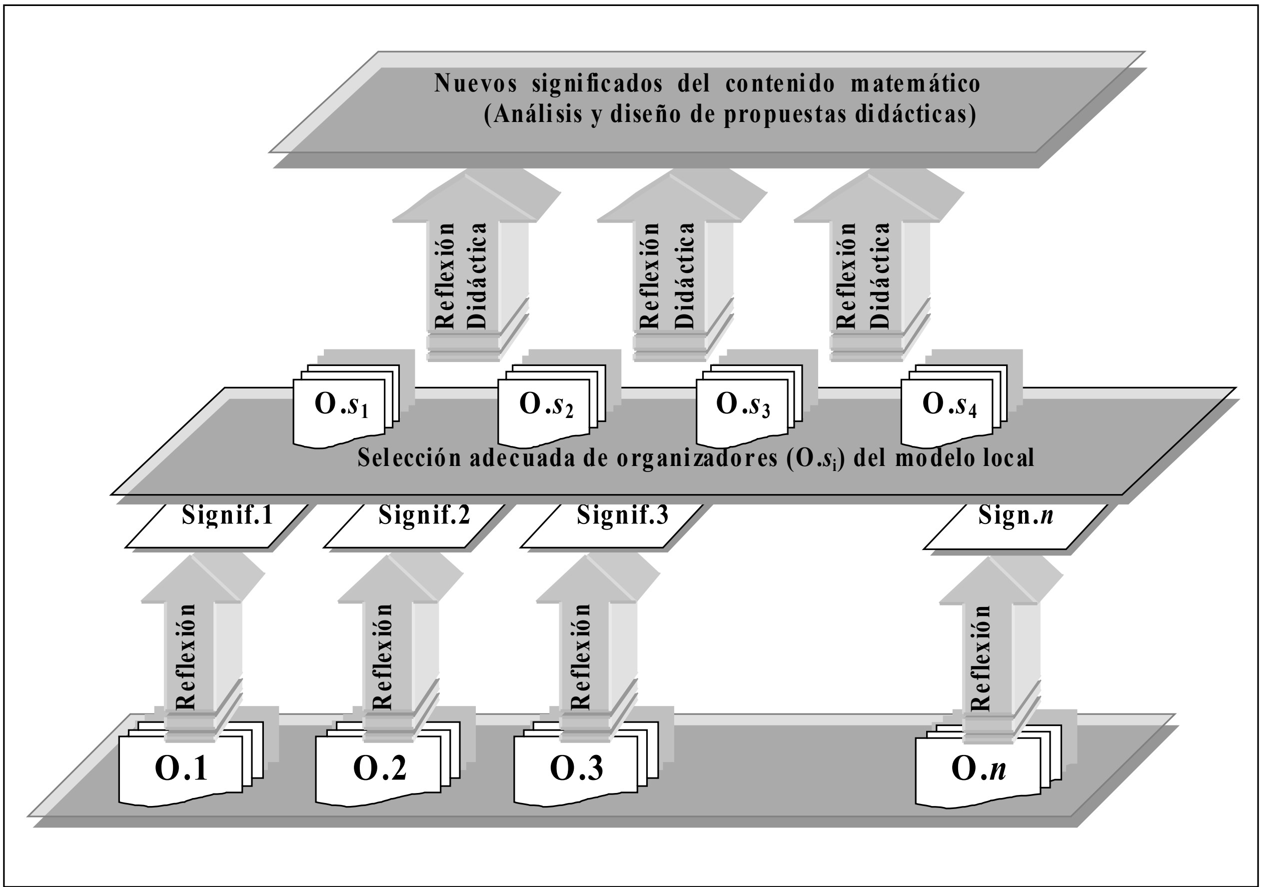
- **Análisis conceptual o de contenido** (estructura formal, definiciones, representaciones, aplicaciones), **cognitivo** (dificultades, errores, comprensión) e **instruccional del contenido matemático**. Para analizar y evaluar las producciones de los alumnos para profesor al respecto consideramos las perspectivas conceptuales, procedimentales, históricas y aplicadas de la propia disciplina matemática, de la Didáctica de la Matemática y las prescripciones curriculares sobre las matemáticas escolares. Los principales documentos consultados para tal fin fueron Apóstol (1967); Boyer (1986); Hiebert y Lefevre (1986); Coll (1988); González et al. (1989); Vinner y Dreyfus (1989); CEC (Junta de Andalucía) (1989); Leinhardt y cols. (1990); MEC-DCB, 1989; MEC, 1991; NCTM (1991); Dubinsky y Harel (1992); Coll, Pozo, Sarabia y Valls (1992); Rico (1992*b*); Romberg y cols. (1993); Vinográdov (1994); Eisenberg (1994); Moreno (1995); Hitt (1995, 1996, 1999); Gómez y Carulla (1999). En particular, es importante subrayar que en este estudio, suscribimos los desarrollos cognitivos y didácticos que conciben el conocimiento matemático en términos de **tres dimensiones** principales: **conceptual**, **procedimental** y **actitudinal** (Hiebert y Lefevre, 1986; Coll, 1988; MEC-DCB, 1989; MEC, 1991; Coll y otros, 1992; Rico, 1992).

- El análisis conceptual y procedimental contempla de manera especial los trabajos más recientes sobre los **sistemas de representación** convencionales o usuales en el estudio de las funciones, así como los procesos de visualización y modelización. Algunos de los trabajos más importantes que consultamos fueron Janvier (1987); Bishop, (1983, 1989); Zimmermann y Cunningham (1991); Romberg (1993); Duval (1995, 1999); Moreno (1995); Hitt (1995, 1996, 1998, 1999, 2000); Rico, Castro y Romero (1996, 2000); Castro y Castro (1997); Rico (1997*a,* 2000); Radford (2001).

- Igualmente destacamos el estudio sobre las nuevas tecnologías de representación, como las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**) que hemos utilizado en este estudio (TI-83 y TI-92), concebidas como tecnologías electrónicas de representación múltiple, con sistema de cálculo simbólico integrado, diseñadas y utilizadas para la enseñanza y estudio de las matemáticas. Los principales documentos que nos sirvieron de fuente y referencia fueron: Ruthven (1990, 1996); Demana, Schoen y Waits (1993); Demana, Waits y otros (1994); Waits y Demana (1995); Moreno (1995); Hitt (1995, 1996, 1998); Penglase y Arnold (1996); Bedoya (1996); Zaslavsky (1997); Moreno (1998); Bedoya y Rico (1998); Kutzler (1999); Bedoya (2000); Santos (2000).

La Figura 2.4 siguiente muestra esquemáticamente la estructura general del modelo local de los organizadores que proponemos para el currículo de matemáticas.

Figura 2.4.
Modelo parcial de los organizadores. Consiste de tres niveles de reflexión y análisis. El segundo corresponde con una selección adecuada de los organizadores (O.s$_i$), con base en los cuales se realiza el análisis didáctico dirigido al diseño y planificación de propuestas curriculares.



A continuación procedemos a presentar los aspectos conceptuales y revisión de estudios relacionados con las cuestiones centrales de la investigación, a saber: los contenidos matemáticos, los tres organizadores del modelo –**EC**, **SR** y **CG**- y las cuestiones relativas al conocimiento didáctico (**CD**) y la formación inicial (**FI**) de los profesores de matemáticas.

2.4. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En este estudio, coherentemente con las demarcaciones conceptuales de la línea de investigación PNA subscribimos la siguiente noción acerca de las funciones y su estudio:

> Entendemos el estudio de las funciones como una prolongación natural del conocimiento numérico en cuanto estudio de relaciones entre números. Ahora bien, el estudio de las funciones se sitúa en un campo más amplio que el estrictamente numérico ya que incorpora conocimientos algebraicos, analíticos y sistemas gráficos de representación (González et al. 1989, p. 9).

El concepto de función, además de ser uno de los más importantes de las matemáticas, debido a su carácter fundamental, integrador y modelizador, es considerado por estudiantes, profesores e investigadores, como uno de los más difíciles de aprender y enseñar (Freudenthal, 1973; Janvier, 1987; González y cols., 1989; Castro y cols., 1989; Azcárate y Deulofeu, 1990; Leinhardt y cols., 1990; Sierpinska, 1992; Romberg y cols., 1993; Deulofeu, 1993, 1995; Tall, 1996). Esta dificultad dentro de las matemáticas escolares se debe en parte a que, exige manejar una gran variedad de sistemas de representación e integra diversos niveles de generalización y abstracción propios de las matemáticas El desarrollo didáctico de toda esta complejidad conceptual y cognitiva asociada con el concepto de función, como dice Tall (1996), *is not without its conceptual difficulties and cognitive struggles* (p. 297).

El concepto de función es central en los curriculos de matemáticas en todos los países y es uno de los principales objetos de investigación en Didáctica de la Matemática (Dubinsky y Harel, 1992; Sierpinska, 1992; Tall, 1996). Sin embargo, a pesar de las múltiples aportaciones que en los últimos años se han venido haciendo, su enseñanza sigue estando basada "en un esquema formal, delimitado por códigos y propiedades de una de las dos estructuras matemáticas tradicionales, los conjuntos numéricos o el álgebra; se tienen en cuenta unas situaciones para aplicar los conocimientos introducidos y se pretende con esto activar determinadas funciones intelectuales a los escolares" (González y otros, 1989, p. 13). Resultados de investigación en Didáctica de la Matemática como los expuestos en esta sección, los tendremos en cuenta y se verán reflejados en la realización (diseño, planificación y desarrollo) y evaluación de nuestro programa de formación.

En el capítulo anterior señalamos que las dos revisiones más completas e importantes de las investigaciones sobre didáctica de las funciones en los últimos 4 lustros son la de Leinhardt y cols. (1990) y la de Romberg y cols. (1993). Hasta la fecha de cierre de este estudio no se ha realizado una nueva revisión tan amplia como estas dos, exceptuando quizás el documento de Tall (1996) sobre *Functions and Calculus* (pp. 289-325) en el *International Handbook of Mathematics Education* del año 1996. En nuestra opinión, este último documento adolece de generalidad, por cuanto se refiere casi exclusivamente a las perspectivas teóricas del propio autor.

Los dos documentos mencionados, además de resaltar la gran importancia que ha tenido y sigue teniendo la investigación sobre la enseñanza, aprendizaje y dificultades de las funciones, coinciden en sus conclusiones al proponer la consolidación de un amplio programa internacional de investigación integrado en torno a este propósito y sugieren tener en cuenta principalmente dos condiciones o directrices, además de recomendar algunos documentos de base para este propósito. Algunos de estos documentos que referenciamos a continuación entre paréntesis despues de la respectiva directriz propuesta, corresponden especialmente a diferentes capítulos del libro editado por Romberg y cols. Algunas de las propuestas y resultados que presentan, las hemos tenido en cuenta para el diseño, realización y evaluación del programa y del curso-taller. En síntesis, las dos condiciones o directrices comunes propuestas por Leinhardt y cols. y por Romberg y cols. en sus respectivos documentos son las siguientes:

1ª. Considerar la comprensión, el aprendizaje, la enseñanza y las dificultades en relación con los procesos de representación, mediados por los diferentes sistemas de representación usuales en matemáticas.

2ª. Estudiar los problemas relacionados con la didáctica de las funciones basada en el uso de nuevas tecnologías informáticas de representación.

En concreto, las dos principales propuestas que hacen estos autores consisten en reflexionar sobre las implicaciones que pueden y deben tener las investigaciones actuales y futuras sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, sus distintos tipos de representación y la utilización de nuevas tecnologías graficadoras en su enseñanza y aprendizaje. En este trabajo seguimos localmente estas indicaciones. Localmente porque nos restringimos a un contexto determinado (Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada) y porque nos referimos a una estructura conceptual (EC) y un contenido matemático (CM) específicos y unas tecnologías (CG) concretas. Estudiamos hechos relacionados con la enseñanza de las funciones en general y las funciones cuadráticas en particular, concebidos desde la perspectiva múltiple de los SR utilizando CG (TI-83 y TI-92).

2.4.1. Las funciones cuadráticas

En el capítulo anterior mostramos que las principales bases de datos y publicaciones sobre investigaciones referidas a las funciones cuadráticas y las calculadoras graficadoras (y los sistemas de representación) en los últimos 11 años (entre 1990 y 2001) incluyen escasa información, a pesar de que la mayoría de los autores en Educación Matemática coinciden en su interés debido a la importancia que tienen estos temas en los currículos matemáticos actuales de enseñanza Secundaria.

Anteriormente, mencionamos que en la base de datos ERIC obtuvimos 42 documentos con el descriptor “funciones cuadráticas”; 7 documentos de investigación con los descriptores “funciones cuadráticas” y “representaciones”; y solamente 2 documentos de investigación con los descriptores simultáneos “cuadráticas”, “representaciones” y “calculadoras graficadoras”. El estudio de las funciones cuadráticas es de gran importancia curricular, no sólo por sus posibilidades y aplicaciones matemáticas y físicas, sino también porque constituyen un conjunto de tópicos integradores de muchas otras nociones, procedimientos y representaciones matemáticas. Este hecho convierte a las funciones cuadráticas en una estructura conceptual interesante, objeto de estudio para la Didáctica de la Matemática.

Uno de los trabajos de investigación sobre la función cuadrática, basados en un marco tradicional de la Didáctica de la Matemática, es el trabajo realizado por Zaslavsky (1997) cuyo propósito era identificar los principales "obstáculos conceptuales" y dificultades que pueden impedir a los estudiantes el aprendizaje de las funciones cuadráticas:

> By conceptual obstacles we refer to obstacles that have a cognitive nature and that can be explained in terms of the mathematical structures and concepts that underlie students earlier learning experiences (Zaslavsky, 1997, p.20).

Zaslavsky analizó los procesos de solución, por parte de alumnos de Secundaria (de 10º y 11º grado) de institutos en Israel, de una variedad de problemas sobre funciones cuadráticas. Identificó 5 tipos distintos de obstáculos conceptuales y otros tipos de dificultades de los alumnos. Los obstáculos identificados los denominó de la siguiente manera:

1. Obstáculo de interpretación de la información gráfica;
2. Obstáculo de la relación entre una función cuadrática y una ecuación cuadrática;
3. Obstáculo de la analogía entre una función cuadrática y una función lineal;
4. Obstáculo del cambio aparente de la forma de una función cuadrática cuyo parámetro es cero;
5. Obstáculo del sobre-énfasis en una de las coordenadas de los puntos especiales.

Todos los problemas utilizados por Zaslavsky fueron "problemas no estándares" sobre funciones cuadráticas. Los problemas fueron problemas no rutinarios sobre diferentes tópicos del sistema o estructura conceptual y procedimental de las funciones cuadráticas. Estos problemas se debían intentar resolver sin utilizar tecnologías graficadoras. Más concretamente, y de acuerdo con las categorías de análisis utilizadas por Leinhardt et al. (1990) en su importante revisión sobre investigaciones relacionadas con las funciones, las cuales a su vez toma de Janvier (1978, 1987), los tipos de problemas versaron sobre "**translación**" o traducción (*translation task*) entre distintos tipos de representación (gráfica, numérica y algebraica); de "**interpretación**" y de "**construcción**".

En nuestro estudio, preferimos utilizar los términos de lectura, visualización e interpretación significativa de los diferentes tipos de representación y no de "traducción". La lectura significativa de gráficos y de tablas o configuraciones numéricas es una actividad propia del pensamiento interpretativo. La lectura significativa, visualización, construcción e interpretación de gráficas de funciones, de ecuaciones y en general de los conceptos y procesos matemáticos asociados con el dominio conceptual o contenido matemático que nos ocupa, son actividades complementarias y fundamentales en nuestra propuesta didáctica y curricular para la realización del programa y correspondiente curso-taller sobre formación de profesores de matemáticas.

Azcárate y Deulofeu (1990) y Deulofeu (1993, 1995) también han trabajado sobre las funciones y sus gráficas basándose en los estudios de Janvier (1978, 1987), concretamente, sobre las concepciones de estudiantes al resolver "situaciones-problemas" en las que tienen que "interpretar" y "construir" gráficas de funciones cartesianas, utilizando papel y lápiz y priorizando el "lenguaje gráfico". Deulofeu (1995) precisa de la siguiente manera los términos de «interpretación» y «construcción»:

> Siguiendo a Leinhardt (1990), una interpretación es una acción por la que el sujeto da algún sentido, o bien llena de significado, a una gráfica, una ecuación o una situación funcional; esta interpretación puede ser local o global, cualitativa o cuantitativa. En la interpretación de una gráfica, el significado obtenido por la interpretación puede quedar dentro del espacio de la gráfica o puede trasladarse a otro espacio (por ejemplo, el de la situación o el algebraico). [...] Por otro lado, entendemos por construcción una acción por la cual se genera alguna cosa nueva. También puede ser local o global, cuantitativa o

> cualitativa. La diferencia fundamental es que mientras la interpretación se mueve dentro de unos datos ya dados, la construcción requiere crear algo no dado; así mismo, mientras la interpretación no requiere ninguna construcción, el recíproco no es cierto, ya que en la mayoría de ocasiones la construcción se apoya en algún tipo de interpretación (Deulofeu, 1995, p. 8).

Tal y como lo hemos venido diciendo, para el diseño, desarrollo y evaluación del programa y su concreción, el curso-taller, hemos tenido en cuenta las anteriores ideas de Janvier (1978, 1987), González et al. (1989), Leinhardt et al. (1990), Sierpinska (1992), Zaslavsky (1997) y Deulofeu (1993, 1995), entre otros. En particular hemos tenido en cuenta las aportaciones de estos autores sobre visualización, lectura, construcción e interpretación de y en los diferentes sistemas de representación, así como los obstáculos y demás tipos y fuentes de dificultades y errores conceptuales y procedimentales. Concebidas estas dificultades, errores y obstáculos como algo natural, inevitable y a tener siempre en cuenta dentro de los procesos de modificación, comprensión, construcción y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, y no como algo negativo, censurable o que hay que evitar (Rico, 1992*b*, 1995).

2.5. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

> La moderna conceptualización de las matemáticas está basada en las nociones de estructura y de sistema; no nos referiremos sólo a conceptos matemáticos, simplemente, sino a sistemas o estructuras. Una estructura matemática es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de composición y de unas relaciones mediante las que se comparan, relacionan y organizan dichos entes; la consideración conjunta de estos entes, las operaciones y relaciones entre ellos es lo que caracteriza una estructura (Rico, 2000, p. 7).

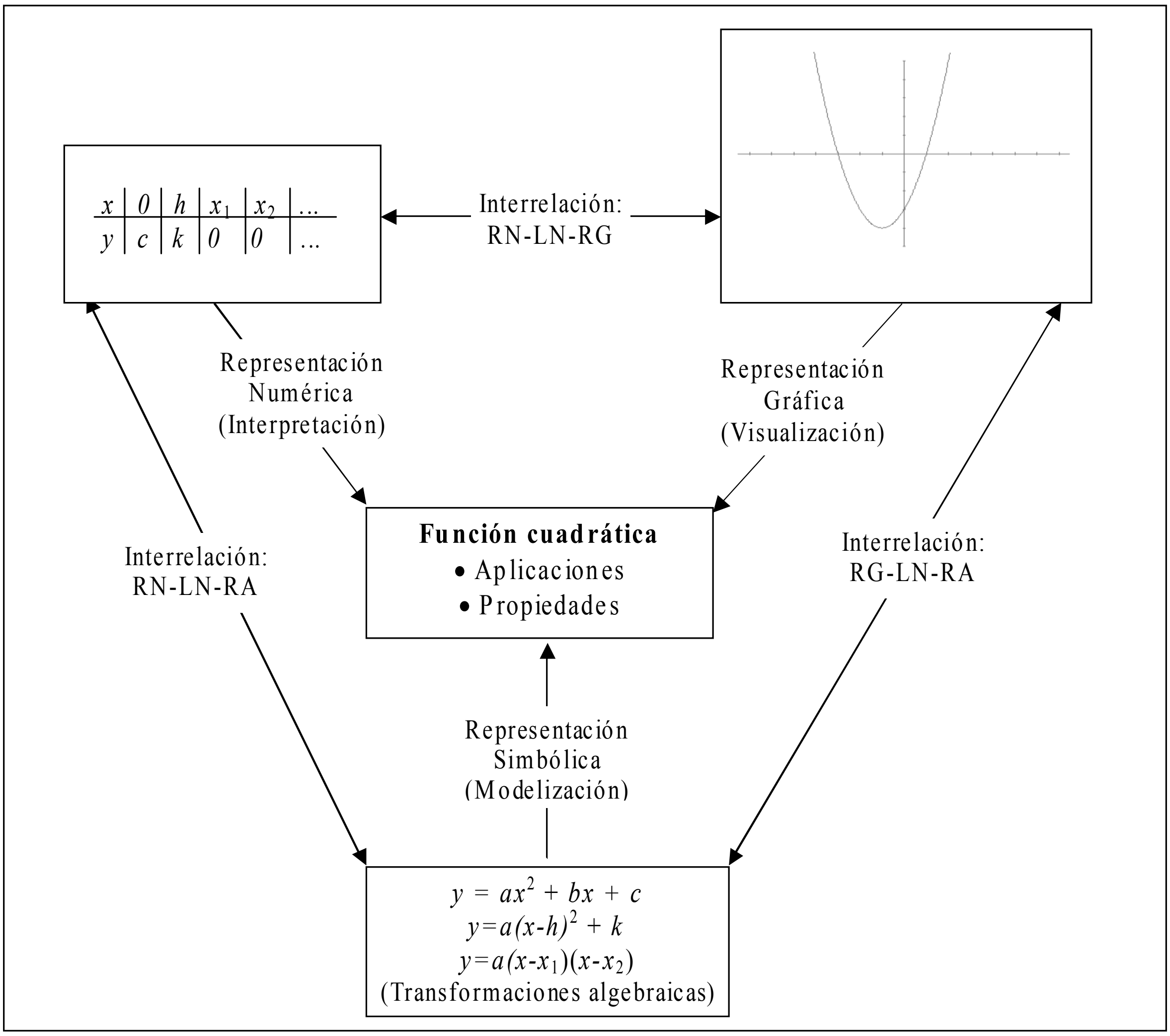
En el apartado 2.2.5 nos hemos referido a la **estructura conceptual** de los contenidos matemáticos proveniente de la teoría cognitiva de la elaboración e incorporados al currículo de matemáticas en los 80. La **estructura conceptual** (**EC**) del contenido matemático es uno de los organizadores contemplados expresamente en este estudio y considera tres dimensiones: conceptual, procedimental y actitudinal. Esta consideración de los objetos y procedimientos matemáticos como estructuras conceptuales sistémicas, tal y como la describe Rico (2000) en el epígrafe inicial de este apartado, es compartida por otro autores como Hitt (2001) y Hiebert y Carpenter (1992). Estos últimos (citados por Hitt, p. 4) plantean además la relación intrínseca entre la comprensión (*understanding*) y las representaciones (internas) de estos objetos y procesos matemáticos:

> We begin defining understanding in terms of the way information is represented and structured. A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network. More specifically the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations. The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections. A mathematical idea, procedure, or fact is understood thoroughly if it is linked to existing networks with stronger or more numerous connections (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 67).

En relación con este organizador (EC sobre la función cuadrática) debemos mencionar los trabajos sobre funciones cuadráticas, sistemas de representación y calculadoras graficadoras, realizados por Gómez y Carulla (1999). En este trabajo, se realiza una revisión sobre la didáctica de la función cuadrática concebida como un sistema estructural, de carácter conceptual, procedimental y representacional, basada en los otros dos organizadores objeto de este estudio: los sistemas de representación (SR) y las calculadoras graficadoras (CG). En particular, nos hemos interesado por las reflexiones que hacen sobre los mapas conceptuales, los sistemas de representación y las funciones cuadráticas. Estos autores incluyen en el sistema de representación simbólico, además de la expresión estándar ($y=ax^2+bx+c$), la expresión canónica del vértice ($y=a(x-h)^2+k$) que permite resaltar directamente las coordenadas del vértice y del foco de la parabola, y es formalmente equivalente a la estándar. Algunas de estas ideas sobre la representación de la estructura conceptual de la función cuadrática mediante mapas conceptuales, nos han servido de referentes para el diseño de para el curso-taller y, en particular, para el análisis de los diagramas conceptuales iniciales y finales elaborados por los alumnos para profesores como representación parcial de la EC sobre el contenido matemático que nos ocupa.

Estos tipos de trabajos, así como el nuestro ponen de manifiesto el hecho de que en la práctica, el dominio (sistema) conceptual de la función cuadrática considerado bajo el marco de los sistemas de representación (incluyendo explícita o implícitamente los procesos de visualización y modelización) y las nuevas tecnologías mediadoras de representación múltiple y cálculo simbólico, se están constituyendo en un nuevo e interesante campo de estudio dentro de la Didáctica de la Matemática. Con el fin de ilustrar las ideas sobre la naturaleza y utilidad de los mapas y diagramas conceptuales como instrumentos de recogida y análisis de la información reflejada en ellos sobre dominio de una estructura conceptual determinada por parte de los alumnos para profesor, en la Figura 2.5 mostramos un tipo de diagrama conceptual que nos ha servido de referencia para expresar la estructura conceptual de la función cuadrática.

Figura 2.5.
Diagrama conceptual de la función cuadrática utilizando dos tipos de SR



Los trabajos de Janvier (1978, 1987*a*,*b*) sobre la construcción, interpretación y comprensión de gráficas de funciones, han marcado un hito en la investigación sobre la didáctica de este importante concepto. Este autor considera que la representación del concepto de función se basa en tres componentes: **símbolos**; **objetos reales**, e **imágenes mentales** (Janvier, 198a):

> A representation can be considered as a combination of three components: **symbols, real objects, and mental images**. We believe however that verbal or language features are equally predominant because they are the links in between those elements. We assume also that one can find representation without a real object component. In order to show that such a subtle and intricate distinction brings about some payoff, we use it with the concept of function (Janvier, 1987a, p.68).

De alguna forma, en este estudio, nos interesa fundamentalmente los "símbolos" relacionados con la representación del concepto de función, considerados como registros semiótico-simbólicos, en el sentido integrado de Skemp (1980) y Duval (1993), para los que el símbolo está basado o expresado en cualquiera de los cuatro sistemas de representación usuales de las funciones: verbal escrito, numérico, gráfico o algebraico. Aunque este no es un trabajo sobre las propuestas de Janvier acerca de las funciones y sus representaciones, no dejamos de tener en cuenta algunos de sus resultados en el diseño de las actividades y materiales del curso-taller en el que se concreta nuestro programa de formación de profesores. Por ejemplo, Janvier (1987*a*) plantea que los estudiantes suelen interpretar y visualizar las gráficas de relaciones y funciones de manera puntual. Dice que generalmente, los gráficos no son usados por parte de los estudiantes ni de los profesores como instrumentos o medios de información global sobre el tipo de relación que modeliza la función. Considera que la interpretación puntual de los gráficos está profundamente enraizada en los procesos de cognición de los estudiantes y esto les impide alcanzar una percepción más global. Como alternativa a esta dificultad, Janvier propone usar la noción de variación junto con el trazado del gráfico, argumentando que esto conduce al alumno directamente desde la situación al gráfico, y viceversa. Propone además, aplazar para más tarde la construcción de la relación gráfico-ecuación.

En este estudio a partir de la experiencia en el uso de las nuevas tecnologías con sistemas integrados de representación múltiple y de cálculo simbólico (como las modernas CG), y gracias a sus posibilidades didácticas (numéricas, gráficas y simbólico-algebraicas), hemos considerado también para la realización del curso-taller las opciones de interrelación entre los distintos sistemas de representación, así como con la información global de la relación numérica y gráfica que modeliza la función.

2.6.2. La noción de representación en Didáctica de la Matemática

A partir de la década de los 80 se empieza a hacer un uso sistemático de la noción de representación en la Didáctica de la Matemática. Rico (2000) caracteriza esta noción de un modo práctico para la Educación Matemática del siguiente modo:

> Las representaciones matemáticas se han entendido, desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas –signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactuan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican sus conocimientos sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas (Rico, 2000, p. 2).

Para éste, así como para otros autores (Janvier, 1987*a*; Kaput, 1987; Duval, 1993; Castro, 1994; Romero, 1995, citados por Rico, 2000), a pesar de que la representación de un concepto matemático lo hace presente mediante un sistema de signos o registros semióticos específicos y convencionales, y basadas en una reglas particulares de procesamiento en cada sistema, dicha representación no lo agota, sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. Desde una perspectiva cognitiva, estas reflexiones implican que cada estructura matemática o concepto requiere para su cabal comprensión del empleo articulado de más de un sistema de representación. Sin embargo:

> No es usual considerar cuales son los aspectos y propiedades de un concepto o estructura matemática que se destacan mediante cada tipo de representación. Cada uno de los modos de representación, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto. Identificar los conceptos con

cualquiera de sus representaciones es una simplificación escolar, inadecuada para la investigación en Educación Matemática. Por ello se deben diferenciar varios tipos de representación en cada concepto (Rico, 2000, p. 8).

En conclusión, los trabajos recientes sobre la comprensión y didáctica del concepto de función, han mostrado que se requiere de una coordinación coherente de diferentes sistemas de representación (Janvier, 1987*a*; Duval, 1993, 1995, 1999*a,b*; Hitt, 1995, 1996, 1998, 1999, 2000; Castro y Castro, 1997; Rico, 2000); así como del desarrollo de las correspondientes y gradualmente más adecuadas "imágenes" o representaciones mentales (Zimmermann y Cunningham, 1991; Castro y Castro, 1997; Rico, 1996). Por lo tanto, siguiendo a estos autores, resulta necesario considerar las relaciones entre diferentes ("por lo menos dos") sistemas de representación de un mismo objeto o concepto matemático e intentar traducir (*translations*) (Janvier, 1987a) o convertir (Duval, 1993, 1995, 1999*a,b*) las propiedades del concepto de un sistema a otro y viceversa. Por ejemplo, Hitt (1996, 1998, 1999, 2000), basándose en Duval (1993, 1995), sostiene que, "la comprensión del papel de los sistemas semióticos de representación puede ayudar a entender cómo los estudiantes construyen conceptos matemáticos", y que, "para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente ese objeto matemático, al menos de dos maneras diferentes".

Para Duval (1999*a*), "un sistema de signos se constituye en un registro semiótico de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

(i) En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa u objeto en un sistema determinado.

(ii) Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.

(iii) Por último, convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa" (p. 29).

Para la representación parcial de la estructura conceptual de la función cuadrática dada en la Figura 2.5 (página 71) hemos tenido en cuenta e intentado reflejar esquemáticamente las tareas de representación múltiple y de interrelación y "conversión" entre diferentes sistemas de representación o "registros semióticos de representación" propuestos por estos autores (Duval, 1993, 1999*a*, Hitt, 1998) para la comprensión, construcción y aprendizaje del concepto.

Por otra parte, con un énfasis más práctico y concreto en sentido didáctico, Castro y Castro (1997) formulan que es "necesario que los estudiantes y profesores distingan los objetos matemáticos (número, recta, funciones) de sus representaciones (numeral decimal, trazo rectilíneo, gráfica) y que alcancen cierto nivel de competencia y habilidad cognitiva y procedimental articuladas en los cuatro sistemas convencionales de representación". En cierto sentido, estos autores consideran que la comprensión de un concepto exige diferenciar el concepto de su representación, esto es, su significado (o representación interna o mental) de su representación externa. Consideran además que los diferentes SR tienen la propiedad de enfatizar diferentes propiedades o aspectos del concepto, porque, "cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto encierra" (Castro y Castro, 1997).

Finalmente, estos dos últimos autores plantean que las dificultades didácticas asociadas con el uso de los sistemas de representación "dependen del nivel de competencia de los profesores y alumnos para usar las diferentes representaciones". Advierten que es necesario tener presente que, aunque la consideración de diferentes SR resultan fundamentales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, a menudo este mismo hecho, o sea, "sus usos simultáneos y no controlados pueden crear problemas" y dificultades de comprensión. Aparte de mostrarse de acuerdo con la importancia de "ayudar a los estudiantes a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que puedan relacionar, de forma eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales que elaboran y construyen" y para que pueda manejar mejor las representaciones externas, creen que los estudiantes "no pueden inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos en su uso y comprensión". Destacan el hecho de que "las relaciones entre las representaciones pictóricas y las estructuras conceptuales son generalmente más complejas de lo que a simple vista parece. La creencia de que las representaciones icónicas son más naturales puede inducir a su utilización acrítica para representar estructuras conceptualmente complejas y para las que los alumnos no estén intelectualmente preparados, lo que llevará a un fracaso del aprendizaje pretendido" y por tanto del modelo y proceso de enseñanza adoptados.

2.6.3. La noción de visualización

Tal y como hemos indicado la **visualización** es una noción fundamental asociada estrechamente con las representaciones múltiples para la comprensión, aprendizaje y enseñanza de las funciones y las matemáticas en general. Particularmente, como en nuestro caso, cuando se utilizan nuevas tecnologías con opciones de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico como recursos mediadores y catalizadores de estas representaciones y visualizaciones de determinados objetos matemáticos.

Las primeras definiciones sobre este concepto tienen una fuerte influencia cognitivista. De acuerdo con las perspectivas e intereses de estudio del grupo de investigación *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), uno de los grupos de investigación que ha trabajado sobre este concepto, la **visualización** puede ser resumida como un proceso de construcción o formación de imágenes mentales gráficas para ejemplificar o pensar sobre conceptos abstractos; también supone el dominio y procesamiento mental de esas imágenes y figuras: *Visualization involves the ability to mentally manipulate, rotate, twist or invert a pictorially presented stimulus object* (Bishop, 1983).

Zimmermann y Cuningham (1991, citados por Ruiz, 2000) denominan la visualización como "pensamiento visual", y "sostienen que al mejorar la educación visual en matemáticas aumenta la intuición, proporcionando al sujeto una mayor capacidad de comprensión. Estos autores, según Ruiz, distinguen tres objetivos principales de aprendizaje asociados con la visualización, a saber:

1º. "Básicos, que consisten en aprender a interpretar la información implícita en representaciones gráficas, algebraicas, geométricas y numéricas, y entenderlas como lenguajes alternativos";

2º. "Funcionales, tales como aprender a interpretar la información en representaciones gráficas y utilizarlas para resolver problemas";

3º. "Generales, como aprender a reconocer simetrías, patrones y transformaciones geométricas); relacionados con el cálculo; y objetivos de alto nivel" (Ruiz, 2000, p. 33).

En el artículo *Intuition and Rigor: The Role of Visualization in the Calculus*, Tall (1991), presenta una interesante revisión sobre algunas investigaciones realizadas en los últimos años sobre el concepto de visualización por parte de miembros del grupo PME. Aunque no presenta una definición explícita de dicho concepto, se puede inferir que la concibe como la simultaneidad de las representaciones gráfica y mental de un concepto o un proceso matemático.

Desde nuestro punto de vista, teniendo en cuenta los intereses didácticos y posibilidades tecnológicas actuales, consideramos que la representación material o física de determinados objetos (conceptos o procedimientos) matemáticos con fines didácticos; como por ejemplo, la representación gráfica (mediante pixeles) de una función en la pantalla de un ordenador o calculadora graficadora, o la representación de un número decimal en un ábaco decimal, o la representación de una figura geométrica poligonal en un geoplano adecuado, etc., facilitan la comprensión de los objetos o conceptos matemáticos involucrados mediante un soporte visual.

Una de las características particulares de los objetos matemáticos relacionados con el estudio de las funciones es que no suelen tener modelos materiales concretos que los representen, modelicen o permitan fácilmente su visualización; son objetos abstractos y formales, y se suele decir que mentales. Esta es una de las diferencias esenciales entre las matemáticas escolares y la mayoría de las demás disciplinas científicas escolares. Este es uno de los principales obstáculos conceptuales que Zaslavsky (1997) encontró como una de las causas importantes de dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en secundaria. La materialización de estos objetos y procesos matemáticos con propósitos didácticos, utilizando modelos físico-concretos y tradicionales (sin utilizar tecnologías adecuadas como las actuales tecnologías electrónicas), especialmente a partir de los cursos superiores de enseñanza secundaria, suelen ser realmente escasas y limitadas. Por ejemplo, para la enseñanza de la derivada no existen muchos modelos físico-concretos que permitan ilustrarlos. Se suele recurrir casi siempre a ejemplos artificiales, descritos mediante los tradicionales dibujos en la pizarra y en el papel, lo cual termina, muchas veces, contribuyendo a que el concepto resulte todavía más abstracto y difícil para los estudiantes. Estas dificultades o divergencias dialéctica-didáctica, entre la carencia y limitaciones de modelos físico-concretos con propósitos didácticos, y la necesidad de que los alumnos desarrollen ciertas competencias de abstracción y visualización, como requisito previo y necesario para poder acceder al conocimiento y al pensamiento matemático más "avanzado", la enseñanza tradicional la ha intentado resolver mediante una enseñanza discursiva (retórica), algebraica y formal.

Basados en las reflexiones anteriores, concebimos la **visualización didáctica**, como un proceso y resultado de representación de los objetos matemáticos escolares con propósitos didácticos. Las modernas tecnologías informáticas con sistemas de representación múltiple, sistema de cálculo simbólico integrados y posibilidades dinámicas e interactivas (como las actuales calculadoras graficadoras), permiten realizar múltiples representaciones de un objeto o proceso y percibir y deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y la observación concreta de sus distintas representaciones, hacen posible y facilitan este tipo de visualización. La **visualización didáctica** mediante las nuevas tecnologías, permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares. De acuerdo con esto, por ejemplo, la presentación simbólica de una ecuación, o de una función, no constituyen visualizaciones en el sentido que acabamos de explicar. En cambio, las representaciones gráficas de la ecuación o función mediante una de estas modernas tecnologías constituye una visualización didáctica del concepto de ecuación o de función. Para que la **visualización didáctica** resulte eficiente y eficaz, debe estar acompañada de actividades de reflexión y abstracción sobre los objetos y prácticas. Como diría Piaget (1979), debe incluir procesos de "abstracción empírica, reflexionante y reflexionada".

Las utilidades de representación múltiple (numérica, gráfica y algebraica) y de cálculo simbólico de las nuevas tecnologías informáticas hacen posibles estos procesos de abstracción, reflexión, traducción o conversión sobre los objetos matemáticos representados y visualizados de estos modos, obviando o superando además, algunas de las limitaciones propias de los recursos y materiales didácticos tradicionales (papel y lápiz; pizarra y tiza), así como las que impone el factor tiempo. En esta situación, la gráfica de una función no necesita de un proceso de construcción sino que es un objeto que aparece en la pantalla y que puede someterse a manipulación y transformación. Estas posibilidades tecnológicas innovadoras no riñen con las concepciones didácticas desarrolladas en los últimos 20 años en la Didáctica de la Matemática sobre los sistemas de representación usuales de las matemáticas; todo lo contrario, las potencian. Tal y como lo hemos reseñado anteriormente, muchos trabajos realizados durante esta última década, sobre los conceptos de función, número y otros conceptos matemáticos, han mostrado que al potenciar su manejo mediante procesos de visualización sostenidos por representaciones adecuadas mejoran las competencias de los estudiantes y se desarrollan habilidades para articular diferentes sistemas de representación y, por consiguiente comprender el concepto en cuestión (Zimmermann y Cunningham, 1991; Duval, 1993, 1995, 1999; Castro, 1995; Castro y Castro, 1997; Hitt, 1996, 1998, 1999; Rico, 1996, 2000).

2.7. CALCULADORAS GRAFICADORAS Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

> La necesidad de que en el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio se integre la reforma del currículo de matemáticas con el uso apropiado de tecnologías debería ser prioritario para los educadores en los próximos cinco años (Waits y Demana, 1995, p.13).

En general, los materiales, tecnologías y recursos que pueden emplearse para el diseño y desarrollo de actividades y unidades didácticas para la enseñanza de cada tópico matemático constituyen otro de los organizadores para el currículo de matemáticas (Rico, 1997*a*, 1998*a*). En particular, para el modelo local y parcial de los organizadores consideramos las nuevas tecnologías informáticas equipadas con utilidades de representación múltiple y sistemas de cálculo simbólico y fundamentadas con los distintos recursos bibliográficos que se han venido desarrollando en la Educación Matemática en los últimos años como uno de los elementos organizadores principales.

Estas nuevas tecnologías de representación (NTR) y cálculo simbólico, como por ejemplo, los ordenadores (con sus respectivos software o programas educativos) y las modernas calculadoras graficadoras (**CG**), constituyen potentes medios de representación y visualización de conceptos y procedimientos matemáticos. Estas posibilidades de representación y visualización de conceptos y procedimientos matemáticos, facilitan su exploración o manipulación a través del teclado, el ratón, los diferentes comandos e interfaces, y permiten, por tanto, considerar nuevos modos de comprensión, construcción y aprendizaje; así como proponer nuevos enfoques de enseñanza de las matemáticas (Fey & Hirsch, 1992; Hembree & Dessart, 1992; Demana, Schoen & Waits, 1993; Romberg et al., 1993; Dunham & Dick, 1994; Waits & Demana, 1995*a*; Hitt, 1995, 1996, 1998; Moreno, 1997, 1998; Ruthven, 1996; Penglase & Arnold, 1996; Bedoya, 1996, 2000; Zaslavsky, 1997; Bedoya y Rico, 1998; Kutzler, 1999; Santos, 2000.

En los últimos cuatro lustros se han venido desarrollando una gran cantidad de trabajos didácticos y propuestas curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, basadas en las, cada vez mejores, posibilidades de visualización y representación múltiple (numérica, gráfica y simbólica) que permiten estas nuevas tecnologías. Se puede encontrar una amplia revisión de muchos de estos trabajos y propuestas en el conjunto de referencias dadas en el párrafo anterior y, especialmente en los siguientes documentos: Romberg et al. (1993, capítulos 2, 3, 10 y 11); ICTCM (1988-2001); *Texas Instruments Resources* (http://www.ti.com/calc/docs).

Demana, Schoen y Waits (1993) y Waits y Demana (1995*a*), al referirse al papel de las nuevas tecnologías graficadoras, como las actuales calculadoras gráficas (**CG**), en la enseñanza del álgebra y el cálculo, las describen como "instrumentos de visualización" y plantean que pueden ayudar a realizar actividades escolares tales como las siguientes:

- Planteamiento numérico y gráfico de problemas.
- Simulación y modelización de situaciones, problemas y conceptos.
- Resolución numérica, gráfica y algebraica (o analítica) de problemas.
- Investigar y explorar las diversas conexiones entre distintas representaciones del planteamiento de un problema.
- Buscar apoyos visuales de resultados obtenidos analítica, algebraica o algoritmicamente.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones mediante métodos gráficos y/o numéricos y después confirmar los resultados algebraicamente.
- Usar métodos visuales para resolver ecuaciones e inecuaciones que no pueden ser resueltos con métodos algebraicos.
- Usar entornos generados por ordenador para ilustrar o visualizar conceptos matemáticos.
- Realizar experimentos matemáticos y hacer conjeturas sobre los resultados.
- Estudiar y clasificar diferentes familias de funciones según su comportamiento o propiedades.
- Anticipar o predecir conceptos de cálculo.

Además, estos autores argumentan que, a partir de la observación y visualización, utilizando tecnologías como el ordenador y la CG, los estudiantes pueden investigar conceptos desde una perspectiva "más real". Proponen una reforma del curriculum de matemáticas que incorpore las nuevas tecnologías de representación como algo normal y corriente. Dicen que si los profesores y alumnos utilizan esos económicos ordenadores de bolsillo que son las CG, convertirán su aula de clase en un verdadero laboratorio informático. De esta forma se conseguirá no sólo un conocimiento profundo de las matemáticas, sino que se podrá "crear un ambiente de aprendizaje en cooperación en el que las matemáticas podrán ser presentadas como un tema apasionante y vivo, en el que la norma será la exploración y la investigación por parte de los estudiantes" (Waits & Demana, 1995*a*).

Estas ideas, precursoras de Waits y Demana y demandadas por Romberg y cols. (1993), acerca de las utilidades curriculares y didácticas de las tecnologías graficadoras, están siendo reforzadas y ampliadas cada vez más en estos últimos años por muchos autores en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Gisin, 1995; Ruthven, 1996; Penglase y Arnold, 1996; Mesa, 1997; Sánchez, 1997; Zaslavsky, 1997; Moreno, 1998; Hitt, 1999, 2000; Kutzler, 1999; Santos, 2000; Santos y Espinoza, 2002).

Así, por ejemplo, en un trabajo sobre "construcción de significados matemáticos" relacionados con procesos infinitos, Moreno (1998) propuso a unos estudiantes (futuros profesores de matemática de Educación Secundaria) actividades en las que había que construir diferentes tipos de representaciones sobre sucesiones y series infinitas usando tecnologías graficadoras. "Estas formas de representación fueron concebidas como herramientas mediacionales para la construcción de conocimientos". Una de las conclusiones más relevantes que obtuvo fue que "los estudiantes pudieron establecer conexiones entre los *fenómenos matemáticos*, representados mediante la actividad en la pantalla y representaciones analíticas dadas por códigos ejecutables". Moreno afirma que trabajando en entornos visuales provistos por tecnologías graficadoras como la TI-92, es posible establecer conexiones entre la actividad que se realiza en la pantalla y las expresiones analíticas dadas como ordenes (*inputs*) a la calculadora. Este tipo de representaciones que las calculadoras hacen factibles a partir de una representación analítica dada previamente, como, p. ej., las gráficas y tablas de valores obtenidas a partir de una expresión algebraica y mediante la ejecución de un determinado comando (GRAPH o TABLE), Moreno (1998) las denomina "*representaciones ejecutables*".

Dunham y Dick (1994), en una amplia revisión sobre la investigación en relación con el uso de las calculadoras graficadoras, dice que una de sus conclusiones más importante es que:

> Graphing calculators have the potential dramatically affect teaching and learning mathematics, particularly in the fundamental areas of function and graphs. Graphing calculators can empower students to be better problems solvers. Graphing calculators can facilitate changes in students' and teachers' classroom roles, resulting in more interactive and exploratory learning environments... The evidence supporting the use of Graphing calculators, certainly suggests that this technology can be a catalyst for, and not an obstacle to, mathematics learning (Dunham y Dick, 1994, p. 444).

Estos autores organizan los resultados de su revisión de acuerdo a las siguientes cuatro categorías:

1. Estudios realizados sobre calculadoras graficadoras.

2. Calculadoras graficadoras y comprensión conceptual.

3. Calculadoras graficadoras y resolución de problemas.

4. Calculadoras graficadoras y dinámicas en el aula.

Los principales criterios generales de revisión tenidos en cuenta por estos autores fueron los lineamientos del *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* del NCTM (1989). Afirman que a pesar de la novedad del fenómeno de las calculadoras graficadoras y nuevas tecnologías electrónicas, los trabajos de investigación encontrados en la literatura al uso al respecto fueron más bien pocos. Casi todos han sido de carácter descriptivo, y la mayoría y más provechosos, afirman haberlos encontrado entre las tesis doctorales y en los *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (ICTCM). Finalmente, sometiéndolo a discusión en la audiencia del NCTM *Research Precession* (en Nashville), proponen la siguiente agenda para futuras investigaciones relacionadas con el uso de calculadoras graficadoras:

I. ¿Qué aspectos de las calculadoras graficadoras producen o ayudan a mejorar la comprensión?
II. ¿Que papel juegan las representaciones múltiples en el aprendizaje cuando se utilizan calculadoras graficadoras?
III. ¿Que habilidades de papel-y-lápiz conservan su importancia?
IV. ¿El uso de la tecnología puede impedir la comprensión?
V. ¿Qué tipo de diferencias se presentan entre éxito y fracaso al implementar el uso de calculadoras graficadoras*?*

2.7.1. Actividades didácticas y calculadoras graficadoras

Las nuevas tecnologías informáticas utilizadas en los últimos diez años con propósitos educativos matemáticos se caracterizan especialmente por incorporar en sus diseños, sistemas dinámicos e interactivos, con múltiples opciones de representación y sistemas de manipulación y cálculo simbólico (SCS o CAS por sus siglas en ingles). En particular, las actuales CG, como los modelos TI-83 y TI-92 de la empresa *Texas Instruments*, con las cuales hemos trabajado en este estudio, son verdaderos ordenadores (computadoras) portátiles o de bolsillo, diseñadas especialmente para aprender, enseñar y hacer matemáticas. Su interface teclados/pantalla permite no sólo visualizar, representar, manipular y analizar de formas gráfica, numérica, algebraica y analítica, ecuaciones, relaciones, funciones y figuras geométricas, sino que permite también corregir los errores de introducción y edición de los datos de un problema, antes de volver a intentar resolverlo. En pocas palabras, permiten y facilitan realizar visualizaciones, representaciones múltiples e interpretaciones en cada sistema y de manera **coordinada** entre dos o más sistemas distintos ("tratamiento" en un mismo sistema de representación y "conversiones" o "traslaciones").

La posibilidad de ser programadas mediante un lenguaje de programación relativamente sencillo, permite generar macros, algorítmos, operaciones y actividades didácticas que involucren procesos repetitivos y recurrentes, tanto con representaciones numéricas, como gráficas y simbólicas (algebraicas o analíticas). También tienen tomas de entrada/salida, que permiten compartir todo tipo de información con otras calculadoras similares e incluso con el ordenador, facilitando así la elaboración de trabajos y preparación de clases para impartirlas luego utilizando los distintos accesorios, como el dispositivo *ViewScreen*, que permite la proyección en una pantalla en el aula de la información contenida en la memoria y la pantalla de la calculadora.

En términos generales, las utilidades didácticas de estas tecnologías permiten un tratamiento perceptible, interactivo, múltiple y coordinado de distintos tipos de representaciones y visualizaciones de nociones y procedimientos relacionados con algún tópico, sistema conceptual o problema. Algunas de las nociones, operaciones y procesos matemáticos elementales que subyacen en el diseño tecnológico de estas herramientas, y que pueden ser hechos explícitos y utilizados con propósitos didácticos, son entre otros, los siguientes:

- Representaciones mediante secuencias de pixeles.
- Modelización virtual del plano cartesiano y euclidiano
- La noción de gráfica completa.
- Familias de gráficas de funciones.
- El teorema de los valores intermedios.
- Tratamiento paramétrico de gráficas de funciones.
- Transformaciones geométricas (translaciones, rotaciones, dilataciones, et.) de gráficas de funciones
- Exploración de gráficas y tablas de valores.
- Aproximaciones.
- Cocientes de diferencias simétricas. Etc.

Estos tópicos junto con otras características tecnológicas relacionadas con la potencia, la capacidad de memoria y la rapidez de ejecución de estas nuevas tecnologías, hacen que éstas sean consideradas hoy día como imprescindibles e insustituibles en determinadas situaciones curriculares (Demana, Schoen y Waits, 1993;

Waits y Demana, 1995*a*). Además, estas tecnologías facilitan la iniciación de los estudiantes más interesados y los estudiantes de matemáticas, en actividades auténticas de investigación matemática. Tanto las tecnologías mismas, como las actividades y problemas interesantes, innovadores y ricos en contenido matemático se están desarrollando a diario, en los cuales la tecnología constituye un medio y un instrumento original de exploración matemática. Esto permite al estudiante aproximarse y mejorar su dominio en las diferentes etapas de la investigación científica -recogida y análisis de los hechos empíricos, formación de hipótesis, verificación, prueba e interpretación de los resultados- (Gisin, 1995).

En definitiva, las nuevas tecnologías electrónicas equipadas con sistemas de representación múltiple y sistemas de cálculo simbólico están jugando un papel determinante en relación con los cambios y desarrollos de contenidos y metodologías matemáticas. Los estudiantes para profesor, los profesores y los estudiantes de matemáticas de los niveles de secundaria superior, preuniversitario y primeros cursos de Universidad no pueden ser ajenos a estos desarrollos. Es necesario que se mantengan al día mediante cursos de formación especiales y que utilicen las nuevas tecnologías de representación y cálculo simbólico, para intentar desarrollar destrezas de razonamiento lógico, adquirir conocimientos de un rango substancial de hechos, aprender a resolver ciertos tipos de problemas no rutinarios, adquirir habilidades de exploración e investigación en matemáticas y en metodología matemática. Según las revisiones bibliográficas y nuestra propia experiencia, estamos observando que las calculadoras graficadoras y las nuevas tecnologías electrónicas pueden ayudar a conseguir estos objetivos, aunque como dijeron Dunham y Dick (1994) a modo de conclusión en su revisión de investigaciones sobre calculadoras y didáctica de la matemática, todavía hace mucha falta más investigación, estudio y reflexión al respecto.

2.7.2. Ejemplos de actividades didácticas basadas en calculadoras graficadoras

A continuación, y a modo de ilustración de las diferentes posibilidades de innovación didáctica y curricular que las calculadoras graficadoras pueden permitir o facilitar, consideradas y utilizadas como tecnologías electrónicas para la visualización, representación múltiple, modelización, exploración e investigación de problemas, nociones y procedimientos matemáticos escolares, presentamos algunos ejemplos de actividades didácticas que hemos utilizado en el curso-taller. Estos ejemplos, van más allá del tradicional uso exclusivo de la CG como herramienta para efectuar cálculos extensos, difíciles o para simplemente ahorrar tiempo. Algunas de estas actividades son tomadas y adaptadas de los manuales de usuarios de las calculadoras y de publicaciones al uso (como por ejemplo, Waits & Demana, 1995*a*); otras fueron diseñadas por el propio equipo investigador.

En términos generales, los objetivos de estos ejemplos son que los alumnos para profesor:

(i) Conozcan algunos ejemplos de actividades de introducción, motivación, construcción, desarrollo e interpretación (fenomenológica en sentido didáctico) de la función y ecuación de segundo grado;

(ii) Conozcan y se familiaricen con las distintas utilidades geométricas, paramétricas, de tratamiento de datos, de representación múltiple, visualización, simulación dinámica, interactiva y de cálculo simbólico de las tecnologías empleadas (CG TI-83 y TI-92).

A.1. Actividad de introducción y motivación de la función cuadrática: Del tratamiento numérico al gráfico

La enseñanza clásica de las matemáticas, tradicionalmente ha privilegiado el tratamiento simbólico-algebraico sobre el numérico e incluso el gráfico. En este tipo de actividad, no sólo se invierte esto sino que se enriquecen las posibilidades de comprensión de las ideas y la motivación actitudinal hacia las matemáticas, ya que se establecen diferentes e interesantes conexiones entre nociones conceptuales y procedimentales del Cálculo (funciones y gráficas), geometría elemental y álgebra. Además, permiten interrelacionar diferentes tipos de representación y visualizar significados de los conceptos y procedimientos, gracias a las diversas utilidades didácticas de las CG, tales como, múltiples opciones de representación, sistemas de cálculo simbólico, opciones dinámicas, etc. El siguiente ejemplo es una adaptación de una actividad propuesta por Waits y Demana[1]. La adaptación ha sido hecha de acuerdo con los objetivos del curso-taller para un ambiente didáctico basado en el uso de la CG TI-92, papel-y-lápiz y teniendo en cuenta las ideas centrales del análisis didáctico como estrategia didáctica.

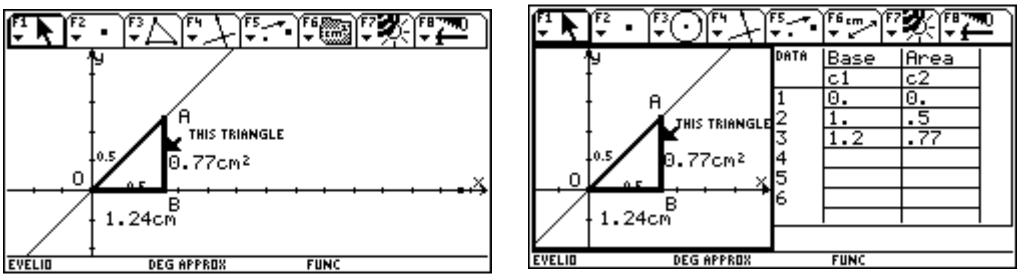
La actividad consiste en inferir la función determinada por el área "bajo" la gráfica de la recta $y=x$ (o $y=2x$) y limitada por las rectas verticales $x=0$ y $x=a$, y el eje Ox. El propósito es motivar la construcción, y generar un ambiente en el que los alumnos puedan visualizar, interpretar y comprender intuitivamente la relación entre la longitud de la base del triángulo y su área. Y, de esta manera, motivar la introducción y construcción de la noción de función de segundo grado. Además, con este tipo de situaciones-problemas, también se puede motivar la introducción y desarrollo del concepto de área bajo una curva ($y=x$) entre $x=0$ y $x=a$, que en el lenguaje formal de la integral definida, corresponde con el concepto de integral definida por $A(x)=\int_0^x t\,dt$.

A continuación presentamos la secuencia gráfica de desarrollo de esta actividad. Todas las figuras han sido obtenidas mediante una calculadora TI-92. La siguiente Figura 2.6.a. muestra la construcción de un triángulo rectángulo (OAB) utilizando la aplicación (O) *Geometry* (una versión adaptada del *software* educativo *Cabri*). Los vértices de este triángulo son: *O* (origen de coordenadas); *A* (intersección de una recta perpendicular con el eje *Ox*) y *B* (intersección de la perpendicular con la bisectriz por el origen del primer cuadrante). Además, se han obtenido la longitud de la base (*OA*) y el área respectiva. La Figura 2.6.b muestra la pantalla de la calculadora en modo "pantalla dividida". En la parte izquierda de la pantalla tenemos la misma construcción de la Figura 2.6.a, y en la de la derecha tenemos una tabla de datos con valores de la base (columna c1) y del área (columna c2), respectivamente.

Figura 2.6.

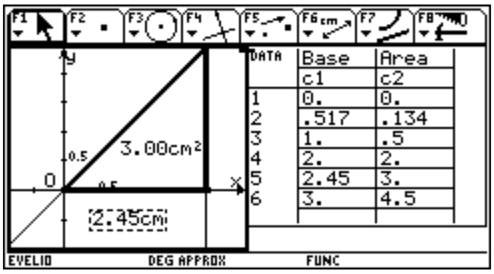
[1] Waits & Demana: *The TI-92: The next revolution in hand-held computer enhanced mathematics teaching and learning*. Manuscrito no publicado.

(a) (b)



Usando apropiadamente distintas opciones de estas modernas tecnologías, podemos, no sólo hacer variar automática y sucesivamente los valores de las dimensiones del triángulo, sino también, enviar directamente estos datos a la tabla mediante la combinación de comandos ∞+D. La Figura 2.6.c muestra algunos de los resultados obtenidos mediante este proceso.

Figura 2.6. (c)



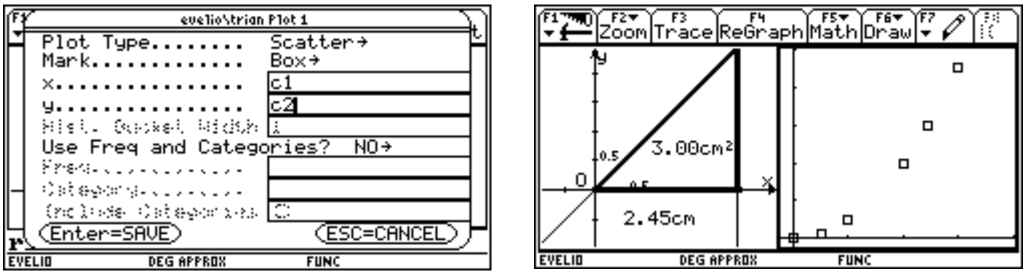
Posteriormente, se pueden usar diversas utilidades de análisis y representación gráfica de la calculadora graficadora TI-92, tales como: O→*6:Data/Matriz Editor→F2:Plot Setup→F1:Define→Plot Type – Scatter*, etc. Es conveniente que el profesor y los estudiantes vayan registrando en la pizarra y en el papel, respectivamente la información que se va obteniendo en la pantalla de la calculadora. Entre otras razones, para tenerla siempre visible y a mano, aun en casos como este, en que la información de la tabla permanece en la memoria de la calculadora.

Observemos ahora las Figuras 2.6. d y e. La figura de la izquierda (d) muestra la ventana de definición del tipo de representación gráfica que utilizaremos (*Plot Type.. Scatter*), y de la relación entre la variable independiente *x* correspondiente a la longitud de la base (c1), y la variable dependiente *y*, correspondiente al área del triángulo (c2).

En la figura de la derecha (e) vemos la correspondiente representación gráfica de los pares de valores de la tabla, mediante puntos (*pixeles*)en un sistema de coordenadas cartesianas *x-y*.

Figuras 2.6.

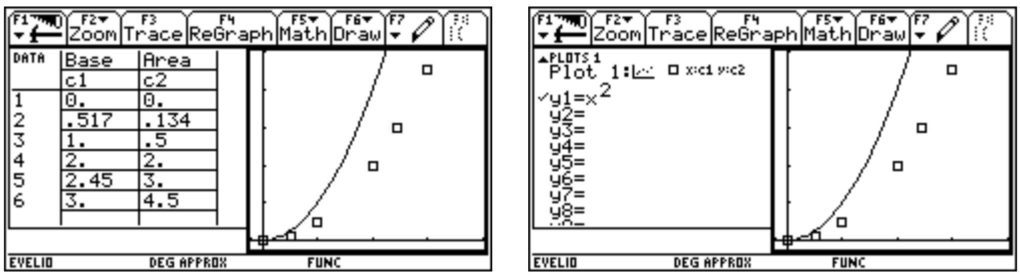
(d) (e)



Como podemos observar, los puntos obtenidos no están sobre una línea recta. Esta podría constituir una buena situación didáctica, en la que el profesor puede proponer a sus alumnos una discusión sobre el tipo de gráficas que podría contener este conjunto de puntos y para que los alumnos realicen exploraciones con sus calculadoras graficadoras con el propósito de encontrar las representaciones gráfica y simbólica-algebraica de la función que contiene (aproximadamente) a este conjunto de puntos. Ahora bien, si elegimos (o si los alumnos eligen), como es de esperarse, la gráfica de la relación dada por $y1=x^2$, rápidamente podemos darnos cuenta que esta gráfica no contiene al conjunto de puntos dados, como lo podemos observar en las dos figuras siguientes (Figura 2.6. f y g).

Figura 2.6.

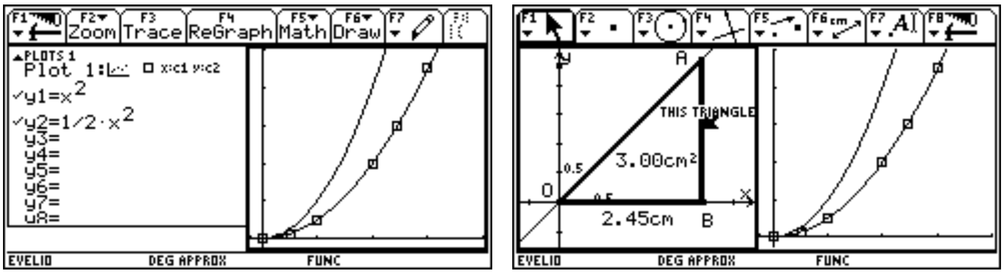
(f) (g)



Sin embargo, es claro que al aplicar una dilatación geométrica a la gráfica de $y1=x^2$, por el factor de dilatación a = ½, obtenemos la gráfica de $y2=½x^2$, la cual, en efecto, contiene los puntos dados, como podemos visualizarlo y comprobarlo en las dos Figuras 2.6.(h, i) siguientes.

Figuras 2.6.

(h) (i)



A.2. Parábolas al azar: De la representación gráfica a la simbólico-algebraica

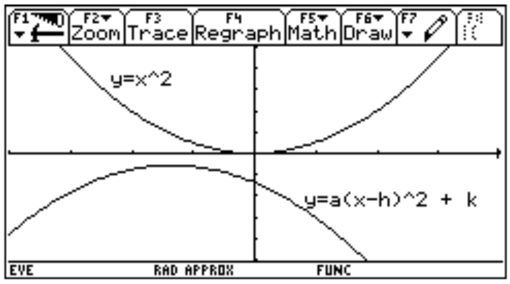
Esta actividad (representación gráfica → numérica → simbólica-algebraica), también propone una vía alternativa a la tradicional (representación algebraica → numérica → gráfica). Consiste en utilizar las utilidades de programación de las nuevas CG para producir mediante un programa (“*parábolas”*) gráficas de funciones cuadráticas al azar en la modelización del sistema de coordenadas rectangulares cartesiano de la pantalla de la CG. Una vez obtenida una de estas parábolas funcionales, el estudiante debe realizar transformaciones geométricas (traslaciones, reflexiones y dilataciones-compresiones) sucesivas y adecuadas de la parábola básica ($y=x^2$) hasta hacerla coincidir con la gráfica de la función obtenida al azar.

Reflexionando e interpretando las acciones y registros el estudiante comprende y construye las relaciones múltiples y complejas entre la representación gráfica de la función y sus representaciones numérica y simbólica, así como entre la gráfica de la parábola básica y su representación simbólica ($y=x^2$) y la gráfica de la función obtenida al azar y su representación simbólica ($y=ax^2+bx+c$ o $y=a(x-h)^2+k$), respectivamente. Por ejemplo, una traslación horizontal hacia la izquierda de la parábola original en una distancia h, corresponde algebraicamente a un cambio de la expresión $y=x^2$ a la expresión $y=(x-h)^2$. Como es bien sabido por todos los profesores, esto, en las condiciones educativas tradicionales, supone una gran dificultad para la mayoría de los estudiantes.

Las Figuras 2.7.(a, b) reproducen dos ventanas de la calculadora TI-92 en las que se visualiza el programa[2] (figura de la izquierda) utilizado para obtener la gráfica de la parábola al azar (figura de la derecha). En esta última también está representada la parábola básica que se propone transformar geométricamente hasta hacerla coincidir con la parábola inicial.

Figuras 2.7. (a y b)
Reproducción del programa "*parábolas al azar*" y de sus efectos

(a)



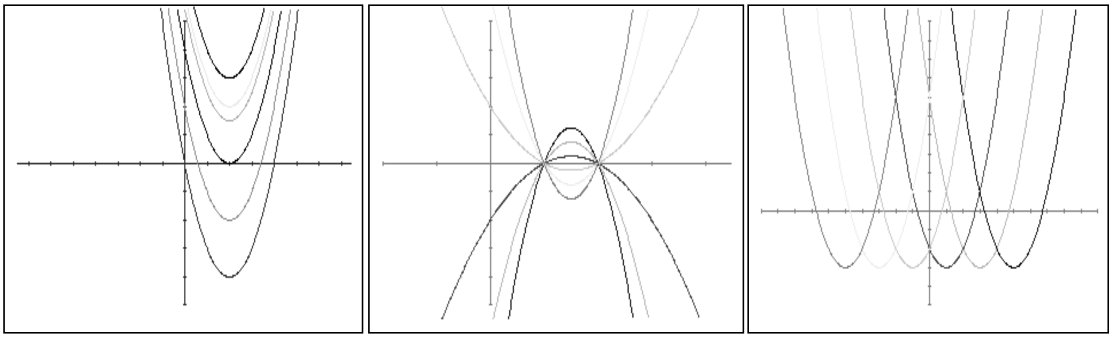
(b)

A.3. Estudio gráfico de familias de funciones: diseños, configuraciones y patrones parabólicos

Esta actividad se refiere al estudio global de las funciones a través de sus gráficas. Como la actividad A.1, también consiste en ir de lo gráfico a lo simbólico, a diferencia de la enseñanza tradicional que se centra principal o exclusivamente en lo simbólico. Se basa en el empleo de diferentes utilidades de visualización y representación gráfica y simbólica de las CG, así como de sus utilidades de exploración y manipulación interactiva. Inicialmente, se suministran a los alumnos (en la pizarra, en la pantalla del aula, en el papel o directamente en la pantalla de la calculadora graficadora), diversos diseños o configuraciones geométricas basadas en familias de parábolas, como los que se muestran en la Figura 2.8 (a, b, c) , a manera de ejemplos.

[2] Este programa como muchísimos más que pueden tener una gran utilidad didáctica son de dominio público y se pueden obtener en la página *web* de la *Texas Instruments Resources*

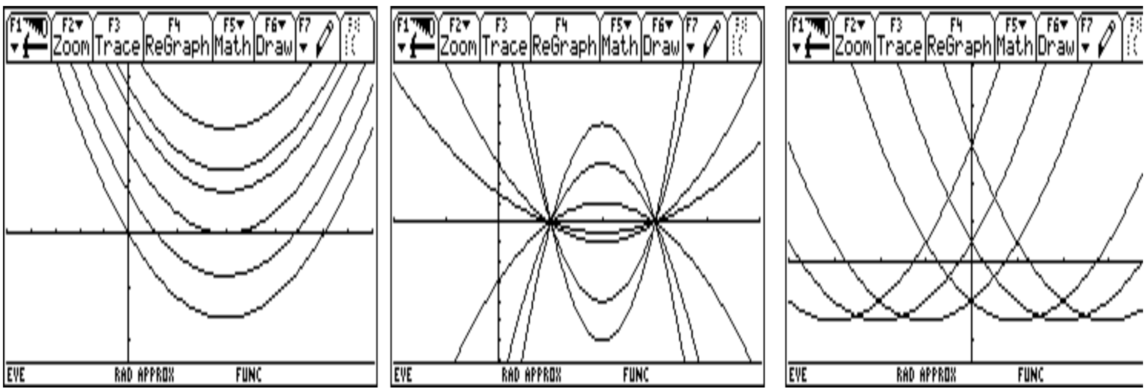
Figura 2.8.
Ejemplos de diseños y configuraciones de parábolas en coordenadas rectangulares cartesianas



a b c

La tarea consiste, primero, en describir en lenguaje verbal adecuado los patrones que se han seguido para realizar cada uno de estos diseños. Después, se debe intentar reproducir configuraciones similares utilizando la calculadora. Finalmente y opcionalmente, se debe deducir y obtener la expresión simbólica-algebraica general (con parámetros) correspondiente a cada diseño, configuración, patrón o familia de parábolas. De todas estas actividades el alumno debe tomar nota por escrito para una posterior reflexión conjunta y entrega de la tarea. En la Figura 2.9 (a', b', c') se presentan algunas reproducciones de las configuraciones anteriores, tal y como se espera que las realicen los alumnos utilizando una tecnología (calculadora) graficadora.

Figura 2.9.
Reproducción de los diseños parabólicos anteriores utilizando una calculadora graficadora



a' b' c'

(http://www.ti.com/calc/) y en otras URL's de la red (véase referencia bibliográfica). Este programa ha sido adaptado por nosotros para la CG TI-92.

Algunas cuestiones que se pueden plantear para la reflexión son las siguientes:

- Utilizando la calculadora graficadora, intentar determinar los valores de los parámetros para cada uno de los diseños gráficos a fin de establecer las correspondencias con sus correspondientes patrones o expresiones algebraicas.
- ¿Qué propiedades geométricas, paramétricas y algebraicas tienen las parábolas que se abren hacia arriba (o hacia abajo)?
- ¿Cómo obtener parábolas más abiertas?
- ¿Qué hay que hacer para que una parábola se traslade horizontalmente, dando origen a una familia de parábolas como las de la Figura 2.8 (c)?
- ¿Qué otros diseños o configuraciones puede generar?

A.4. El $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ de las funciones cuadráticas

Ésta es un tipo de actividad complementaria a las dos anteriores, así como una alternativa diferente o complementaria de las actividades que habitualmente se proponen en la enseñanza tradicional para la enseñanza de las funciones cuadráticas. Algunos profesores y autores de libros de texto y materiales didácticos tradicionales suelen considerar las nuevas tecnologías informáticas solamente como instrumentos para realizar cálculos y gráficas difíciles y más rápidamente, o para comprobar resultados previamente obtenidos mediante los métodos tradicionales. En este caso, se trata de utilizar la potencia y las utilidades didácticas de las modernas CG para representar y visualizar en muy poco tiempo un gran número de funciones cuadráticas con el fin de estudiar globalmente propiedades gráficas y paramétricas (relacionadas con los parámetros o coeficientes ***a**, **b*** y ***c***). Consiste en investigar los efectos de la variación de los parámetros ***a***, ***b*** y ***c*** de la expresión algebraica estándar de la función cuadrática $y=\boldsymbol{a}x^2+\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}$ sobre las respectivas gráficas, utilizando una tecnología graficadora. Por ejemplo, se pueden investigar y formular conjeturas acerca de los efectos sobre la gráfica (parábola) correspondiente, cuando ***c*** varía y ***a*** y ***b*** permanecen constantes. La gráfica se debe obtener en una misma ventana de vizualización de la calculadora. ¿Qué propiedades de la parábola (simetría, vértice, intersecciones, etc.) se modifican? Para el caso cuando ***b*** y ***c*** permanecen fijos y ***a*** varía, se presentan situaciones matemáticas y didácticas muy interesantes y profundas. Por ejemplo, cuando

a sólo toma valores enteros, cada vez más grandes en valor absoluto. O cuando ***a*** toma valores positivos (o negativos) cada vez más próximos a cero. Con la ayuda de la calculadora se pueden primero formular conjeturas y comprobarlas después.

En la práctica, la actividad se puede concretar en los siguientes pasos:

(i) Configurar o determinar valores apropiados de las variables de la ventana de visualización de la CG para obtener gráficas completas de las funciones cuadráticas definidas algebraicamente mediante las siguientes expresiones:

(a) $y=x^2$. (b) $y=-x^2$. (c) $y=x^2+2$. (d) $y=(x-1)^2+1$. (e) $y=-x^2+2$. (f) $y=(x-1)(x+2)$. (g) $y= x^2-2x+2$. (h) $y=(x-2)^2-4$. (i) $y= x^2+x-2$. (j) $y= x^2-4x$.

(ii) Bosquejar en el cuaderno las gráficas obtenidas en la pantalla de la CG e indique qué expresión algebraica corresponde con cada una de ellas.

(iii) Comparar gráfica y algebraicamente los siguientes pares de funciones, señalar y describir sus principales características comunes: (a) y (b); (c) y (e); (d) y (g); (f) e (i); (h) y (j).

(**iv**) Dada una función cuadrática $f(x)$ en cualquiera de sus formas algebraicas (estándar, canónica del vértice o factorizada) estudiar y explicar los efectos geométricos (gráficos), numéricos y algebraicos que tienen las variaciones de los parámetros reales A, B y C sobre las (familias de) funciones dadas por $F(x)=Af(x+B)+C$.

(**v**) Reflexionar sobre las propiedades de las formas generales (gráficas y algebraicas) y sus relaciones entre ellas de las funciones cuadráticas dadas algebraicamente mediante las siguientes expresiones (estándar, canónica del vértice y factorizada, respectivamente):

(a) $y= ax^2+bx+c$. (b) $y= a(x+h)^2+k$. (a) $y= a(x-r_1)(x-r_2)$.

Todas las actividades que hemos descrito anteriormente a manera de ejemplos prototípicos no sólo resultan muy interesantes para los alumnos de educación secundaria, sino también muy útiles para la motivación y comprensión de las nociones e ideas relacionadas con las funciones cuadráticas, pero que, sin las actuales tecnologías resultaría prácticamente imposible llevarlas a cabo eficazmente en los intervalos de tiempo que el currículo tradicional asigna a estos tópicos.

2.8. FORMACIÓN INICIAL Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

El conocimiento matemático forma parte de la herencia cultural y de los valores de la sociedad que la educación y los educadores matemáticos deben poner al alcance de los individuos que la integran. Las metas, intenciones y esfuerzos sistemáticos para alcanzarlo constituye una problemática fundamental para la comunidad educativa. La responsabilidad de los educadores matemáticos frente a esta problemática es grande y compleja (Rico, 1998*c*). Para este autor, los datos de esta problemática constan de lo siguiente:

- Un amplio campo de conocimientos denominado Matemáticas, constituido por sistemas simbólicos estructurados e interrelacionados, producto de una evolución histórica y social y de unas opciones y determinaciones epistémicas también elaboradas o desarrolladas histórica y socialmente.
- Unos sujetos que poseen unas competencias y funciones cognitivas generales e individuales y que el educador ayuda en su desarrollo específico y en la "construcción de significados simbólicos compartidos", relativos a dicho campo de conocimientos.
- Un ámbito de múltiples prácticas sociales, científicas y tecnológicas en y con las que se intenta responder a una gran diversidad de cuestiones, inquietudes e interrogantes relacionados con toda la variedad de fenómenos relativos a estas prácticas, utilizando una gran diversidad de valores, concepciones, conocimientos e instrumentos matemáticos, tecnológicos y educativos para tal efecto.

Este autor agrega que "el núcleo de la cuestión radica en que, para abordar de modo sistemático y fundado el tratamiento y resolución de los problemas educativos mencionados, se necesitan unos profesionales cualificados, con formación científica rigurosa y diversificada, adquirida en la universidad y centrada en el análisis didáctico de los contenidos matemáticos" (Rico, 1998*c*).

Un objetivo general del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el cual se ubica este estudio, es proveer los elementos fundamentales de conocimiento y análisis didáctico que propendan por esta "formación científica, diversificada y cualificada". En las próximas secciones presentamos los elementos conceptuales y metodológicos de estas propuestas curriculares de formación inicial del profesorado, que hemos tenido en cuenta como marco conceptual al respecto para esta investigación.

2.8.1. Formación inicial del profesorado de matemáticas de enseñanza secundaria

La **Formación Inicial** y la **Formación Didáctica** del profesorado de matemáticas son dos de los aspectos relevantes y de interés en la formación profesional del profesor de matemáticas, que asumimos como elementos organizadores de este trabajo. En relación con la formación profesional del profesorado nos interesan especialmente las aportaciones relacionadas con la caracterización de los procesos de formación inicial y el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria, contextualizado y localizados en los tópicos matemáticos y metodologías didácticas específicas de nuestro trabajo. Algunos autores clasifican en tres grandes campos los estudios sobre la formación profesional del profesor de matemáticas:

(i) relativas al aprendizaje de la enseñanza;

(ii) relativas a la práctica profesional;

(iii) relativas a cuestiones psicológicas (Llinares y Sánchez, 1990; García Blanco, 1996; Flores, 1998*a*).

En este estudio nos centraremos principalmente en el primero de los tres ámbitos mencionados. Estos autores, centrándose en esta primera perspectiva, la relativa a "aprender a enseñar" y basándose en otros autores como Shulman (1986), Wilson, Shulman y Ritcher (1987), proponen considerar los trabajos sobre el conocimiento del profesor y sobre su formación inicial de acuerdo con una clasificación basada en los dos tipos de cuestiones siguientes: una referida a **"las componentes del conocimiento profesional base**" y otra referida a lo que denominan como "**proceso de razonamiento pedagógico del profesor**".

Las cuestiones relacionadas con el "**proceso de razonamiento pedagógico**" las caracterizan teniendo en cuenta seis aspectos que consideran "comunes del acto de enseñar", a saber: "comprender, transformar, instruir, evaluar, reflexionar y nueva comprensión". Y las cuestiones referidas a "**las componentes del conocimiento profesional base**" las caracterizan de acuerdo a las siguientes categorías:

"conocimiento de la materia específica";
"conocimiento curricular"
"conocimiento de contenido pedagógico".

En lo que sigue, presentamos una breve descripción de estos tres tipos de conocimientos con las modificaciones o adaptaciones de acuerdo con los objetivos de nuestro estudio. En particular, consideraremos estos tres tipos de conocimientos de acuerdo con los siguientes términos: (i) conocimiento del contenido matemático escolar; (ii) conocimiento del currículo; y (iii) conocimiento didáctico propiamente dicho.

(i) Conocimiento del contenido matemático. Llinares y Sánchez (1990), García-Blanco (1996), Flores (1998*a,b*) y Rico (1997*a,b*), consideran las siguientes "dimensiones" para analizar el contenido matemático escolar:

- Conocimiento disciplinar (conceptual y procedimental) del contenido matemático específico, concebido como sistema o estructura conceptual.
- Conocimiento epistemológico y fenomenológico del contenido matemático.
- Actitudes y creencias sobre el conocimiento relativo a este contenido matemático.

(ii) Conocimiento sobre el currículo. Este tipo de conocimiento se refiere a la familiaridad y consciencia del profesor para diferenciar y tratar con las distintas dimensiones del currículo y planificar y razonar coordinadamente con todas ellas (Shulman, 1986, citado por Blanco, 1997, p. 49). El concepto de currículo que utilizamos en este estudio corresponde con la dada por Rico (1997*a*, Cap. I), Rico, Castro y Coriat, (1997, Capítulo II) y Rico (1998). Este concepto, descrito ya en la sección 2.2.4, consiste, en términos generales, un programa o plan de formación que se preocupa, localmente, por cuestiones relativas al conocimiento matemático y a los procesos asociados de su aprendizaje, enseñanza y evaluación. En esta teoría curricular se distinguen cuatro dimensiones: conceptual, cognitiva, ético-formativa, y políticosocial. Todas ellas referidas al currículo entendido como plan de formación, susceptibles de ser estructuradas a distintos niveles, esto es, de manera sistémica y con énfasis diferenciados.

(iii) Conocimiento didáctico asociado al contenido matemático. En este estudio vamos a llamar **conocimiento didáctico** (**CD**) a los conocimientos que permiten llevar a la práctica los dos tipos de conocimientos previos (i y ii). No consideraremos como otros autores el denominado "conocimiento de contenido pedagógico". Desde nuestro punto de vista, el **CD** constituye el conocimiento que se centra en las matemáticas escolares, es decir, considera las matemáticas en tanto son objeto de enseñanza y aprendizaje y se propone dar respuestas fundadas a problemas locales de su comunicación y comprensión. Para ello, es necesario ampliar el campo de los significados del conocimiento matemático y sustentarse en ellos. A los efectos de las tares de planificación y diseño de unidades didácticas para el aula de matemáticas el **conocimiento didáctico** del contenido matemático debe incorporar nuevas dimensiones de significación al significado formal y deductivo convencionales. Para ello ha de sostenerse sobre una fundamentación disciplinar objetiva y no debe basarse exclusivamente en concepciones subjetivas. A partir de estas reflexiones se justifica y definen algunos de los objetivos generales de la propuesta y del modelo local de los organizadores que hemos descrito ampliamente junto con nuestra concepción sobre el conocimiento didáctico anteriormente en el apartado 2.2.

Rico (1997, pp. 15-38) propone varias dimensiones para articular el conocimiento didáctico del contenido matemático. Entre las más significativas, considera:

- dimensión estructural y formal,
- dimensión histórico-epistemológica,
- dimensión fenomenológica,
- dimensión cognitiva,
- dimensión representacional,
- dimensión heurística, orientada a la detección, planteamiento y resolución de problemas,
- dimensión modelizadora,
- dimensión mediacional e instrumental o tecnológica.

Nuestro estudio se centra en la construcción del contenido didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de Secundaria, atendiendo a tres de las dimensiones anteriores, a saber: **dimensión estructural y formal**; **dimensión representacional**; y **dimensión instrumental-mediacional o tecnológica**.

2.8.2. La formación inicial de profesores de matemáticas en España

Desde el año de 1970, de acuerdo con la Ley General de Educación, la formación inicial del profesorado de matemáticas de enseñanza secundaria en España se ha basado en un Curso de Aptitud Pedagógica (C.A.P.), que generalmente ofrecían los Institutos de Ciencias de la Educación (ICE), creados por la misma Ley. Estos cursos se ofrecían a los interesados en la enseñanza de las matemáticas (que vienen a ser casi todos los egresados de la Licenciatura en Matemáticas). "Salvo excepciones, el C.A.P. suele ser considerado un mero trámite a cubrir, del que no se espera ninguna formación ni orientación profesional cualificada" (Rico, 1994).

El Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática, como uno de los campos de conocimiento en los que se estructura la Universidad española, surge oficialmente con la Ley de Reforma Universitaria de 1983. Según Rico (1994), "éste es un momento clave e importante para la institucionalización y consolidación de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y académica en España". Luego, a partir de 1991 con la nueva Ley de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE), se ponen en cuestión las propuestas vigentes sobre la formación inicial del profesorado en general y el de matemáticas de Enseñanza Secundaria en particular. Esta Ley extiende la enseñanza obligatoria hasta los 16 años, incorpora la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y exige como requisito necesario la formación de Licenciado:

> Para impartir las enseñanza de la Educación Secundaria será necesario además estar en posesión de un título profesional de especialización didáctica. Este título se obtendrá mediante la realización de un curso de cualificación pedagógica, con una duración mínima de un año académico, que incluirá en todo caso un periodo de prácticas docentes. [...] Para impartir el bachillerato se exigirán las mismas titulaciones y la misma cualificación pedagógica que las requeridas para la Educación Secundaria Obligatoria (LOGSE, 1990).

A pesar de estos avances la formación inicial del profesorado de matemáticas de educación secundaria sigue reclamando transformaciones efectivas que permitan producir los efectos necesarios de cualificación profesional en relación con los conocimientos didácticos y la formación profesional deseados. Por ejemplo, en relación con el conocimiento matemático escolar, la mayoría de los profesores de matemáticas de secundaria se ha formado en el espíritu de las denominadas "Matemáticas Modernas", con una orientación esencialmente bourbakista. Rico y Sierra (1994) explican que "esta formación matemática responde a planes de estudio elaborados durante los años 70 y comienzos de los 80, en los que predomina un planteamiento formalista, con énfasis en las estructuras, en la corrección de los procedimientos y en el control conceptual mediante definiciones y desarrollos exhaustivos de procesos de cálculos simbólicos"

De todas maneras, estos avances los consideramos importantes y necesarios para la consolidación de una comunidad académica educativa con múltiples intereses y papeles (desarrollo de reformas curriculares, creación de programas de doctorados específicos de Didáctica de la Matemática, creación de sociedades de profesores de matemáticas, creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática –SEIEM-, publicaciones periódicas, etc.), que a la larga tienen y tendrán repercusiones y consecuencias trascendentales para la formación general e individual del profesorado de matemáticas de todos los niveles. Para Rico (1994), "estos desarrollos han permitido disponer de un marco adecuado para la obtención y transmisión de los avances científicos en Didáctica de la Matemática, con la participación de investigadores cualificados de otros países en la orientación, asesoramiento y evaluación de las tesis". Para este autor, estos procesos no sólo han impulsado el desarrollo científico de la Didáctica de la Matemática sino que también han fomentado la formación de investigadores, profesores, equipos y líneas de investigación estables[3].

Así las cosas, el panorama sobre la intervención del Área de Didáctica de la Matemática en la Formación Inicial de profesores de matemáticas en España no es

[3] Para una información más completa sobre el desarrollo histórico de la Didáctica de la Matemática en España, remitimos al lector a los siguientes documentos: Rico (1992*a*, 1994, 1999); Rico y Sierra, 1994.

todavía muy alentador. El campo de especialización y profesionalización docente para futuros profesores de matemáticas sólo está contemplado en 8 universidades (Alicante, Almería, Autónoma de Barcelona, Cantabria, Complutense de Madrid, Granada, La Laguna y Valencia). Estas universidades ofrecen asignaturas optativas de Didáctica de la Matemática en los segundos ciclos de la Licenciatura de Matemáticas. La principal orientación de estas materias es la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, con una intensidad horaria que oscila entre 6 y 12 créditos. En estas condiciones, podemos afirmar que menos del 10% de los licenciados en matemáticas concluyen sus estudios con alguna formación general sobre Didáctica de la Matemática. No es entraño entonces, el desconocimiento que tienen los estudiantes sobre esta materia.

La alternativa que predomina en las demás universidades consiste en considerar la formación inicial de los profesores de matemáticas como formación de postgrado. Porque, entre otras razones, aun no se han puesto en práctica de forma generalizada en el teritorio español (ni en Andalucía) la normativa legal que obliga el nuevo Curso de Cualificación Pedagógica (C.C.P.) sobre formación del profesorado de secundaria (Real Decreto 1692/1995). Por esta razón, la formación inicial del profesorado de secundaria, en casi todas las universidades se continua llevando a cabo mediante los tradicionales C.A.P., que por lo general se imparten en los ICES o en algunos Centros de Formación de Profesores. El C.A.P. de Matemáticas consta de 20 horas de clases presenciales teóricas y 15 días de estancia en un aula de Secundaria. Con esto se pretende proporcionar la formación básica en Didáctica de la Matemática del futuro profesor de matemáticas.

Rico (1999) plantea que, de esta forma, "en los nuevos planes de estudio se está perdiendo una magnífica oportunidad para ofrecer a los estudiantes de las Licenciatura en Matemáticas una visión seria y fundada de la dimensión educativa y didáctica de la matemática". Como este autor, creemos en la necesidad de que "la Universidad española debe asumir seria y profundamente sus competencias y compromisos en la formación inicial de estos profesionales, elaborando y desarrollando planes de formación con una sólida base científica, integrados totalmente en su estructura docente e investigadora configurada en los Departamentos y Áreas de Conocimiento Didáctica de la Matemática" (p. 3).

2.8.3. El Plan de Formación Inicial

El Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas realizado por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada es ofrecido para los alumnos de 5º curso de la especialidad de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Ciencias (Plan de Estudio de 1975). Estos alumnos, al llegar al último curso de su carrera, tienen ya una sólida formación en los contenidos matemáticos de su carrera, los cuales satisfacen ampliamente los estándares necesarios de formación en matemáticas para ser profesores de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y Post-Obligatoria (Bachillerato). Sin embargo, llegan al 5º curso sin ningún tipo de preparación ni conocimientos organizados y objetivos sobre didáctica de la matemática, ni sobre organización curricular, ni sobre cualquier otra disciplina de orientación educativa o pedagógica, a pesar de que su más probable salida profesional es la docencia de las matemáticas (Rico, 1997*c*).

El Plan de Estudios con Título de Licenciado en Ciencias Matemáticas está organizado en dos Ciclos, el primero consiste de materias comunes, tiene una duración de tres cursos y una programación de cuatro asignaturas fundamentales y tres complementarias. Las asignaturas fundamentales son: Análisis Matemático, Geometría, Algebra y Cálculo de Probabilidades y Estadística. Y las otras tres asignaturas complementarias son: Topología, Física General y Cálculo Numérico. El Segundo Ciclo, con una duración de dos cursos, consta de tres especialidades diferentes: Especialidad de Estadística e Investigación Operativa; Especialidad de Matemática Fundamental y Especialidad de Metodología.

La Especialidad de Metodología, que se debe desarrollar durante los dos últimos cursos de la carrera, comprende 11 asignaturas entre propias y opcionales y cuenta con 45 horas semanales en total para su desarrollo. Las asignaturas que le son propias o específicas y que la situan en el ámbito de la Didáctica de la Matemática son las cuatro siguientes:

- Supuestos de la Educación.
- Métodos Estadísticos aplicados a la Educación.
- Didáctica de la Matemática en el Bachillerato (4 horas semanales).
- Prácticas de Enseñanza en el Instituto.

Las dos últimas están a cargo del Departamento de Didáctica de la Matemática desde el curso 87-88 y mediante ellas implementa su **Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria**. Estas dos asignaturas constituyen toda la formación que reciben sobre Didáctica de las Matemáticas los estudiantes (futuros profesores) que egresan de este Plan. La primera (Didáctica de la Matemática en el Bachillerato), proporciona al profesor en formación, fundamentos sobre teoría del currículo y Didáctica de la Matemática y conocimientos (didácticos) sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro del Sistema Educativo en sus etapas Obligatoria y Post-obligatoria. La segunda, aporta el contacto necesario con el aula, con los alumnos, con los colegas, con las instituciones y con la realización de propuestas didácticas y curriculares. De esta forma tambié, el Plan de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada ofrece a los futuros Licenciados la opción del Certificado de Aptitud Pedagógica (C.A.P.).

En un estudio realizado por Rico y Coriat (1996), mediante el análisis de las repuestas de los alumnos del último curso del Plan a encuestas y entrevistas con el propósito de establecer sus niveles iniciales de formación y conocimientos sobre Educación Matemática y sobre el Sistema Educativo, establecieron las siguientes “características del perfil promedio” de estos alumnos:

1. Considera que su nivel de formación matemática es más que suficiente para ser profesor de Matemáticas.
2. Desconoce la existencia de un campo de trabajo denominado Educación Matemática y de las actividades que en el se realiza.

3. Concibe la Didáctica de la Matemática como una colección de recomendaciones, trucos y reglas para hacer las clases de matemáticas activas y agradables.

4. Carece de conocimientos sobre Historia de las Matemáticas. Esto conlleva a una concepción de la naturaleza de las matemáticas estática, poco adaptada a las distintas maneras de abordar y resolver problemas por parte de los matemáticos.

5. Posee una visión estrictamente técnica de las matemáticas, sin información sobre planteamientos epistemológicos relativos a la naturaleza del conocimiento matemático, acerca de la integración de las matemáticas en la cultura, en el pensamiento o en las propias ciencias, acerca de sus aplicaciones prácticas, acerca del aprendizaje de los saberes matemáticos, en particular, sobre Psicología del Aprendizaje.

6. Concibe la propia enseñanza como futuro profesor basada en esquemas "reproductores": si un profesor ha influido positivamente en ellos, esta influencia se eleva a la categoría de "arquetipo".

7. Desconoce la situación actual en los niveles escolares, exceptuando referencias familiares, cuando las hay, y a pesar de que algunos dan clases particulares.

8. Asigna inicialmente poco valor a esta asignatura (Didáctica de la Matemática en Secundaria).

9. Es muy receptivo para recibir información sistemática relativa a Educación Matemática.

10. Tiene capacidad para utilizar la información recibida.

11. Muestra un enorme interés por conseguir más y mejores conocimientos y por profundizar en ellos.

Una descripción de los objetivos y contenidos de estas asignaturas, pueden contribuir a terminar de caracterizar el perfil del profesor que se pretende formar en este Plan. Estos objetivos y contenidos indican el tipo de información y conocimientos didácticos profesionales que desde esta propuesta de formación se consideran más convenientes. Los contenidos, no sólo se seleccionan en función de los objetivos, sino que además, constituyen una propuesta curricular organizadora de la formación y perfil del profesor de matemática que se espera lograr, y una propuesta institucional a la comunidad educativa sobre el tipo de conocimiento didáctico y profesional que se consideran más conveniente para estos futuros profesores de matemáticas.

En términos generales, estos contenidos están estructurados en dos grandes bloques. Un primer bloque (**A**), propuesto para ser trabajado durante dos trimestres, sobre las "Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas de Educación Secundaria" y sobre "Fundamentos del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria", respectivamente. Y un segundo bloque (**B**), a realizarse en un tercer trimestre sobre el "Análisis Didáctico y Diseño de Unidades Didácticas". Para una descripción más amplia sobre las dos asignaturas "Didáctica de la Matemática en Secundaria" y "Prácticas de Enseñanza en Institutos" (contenidos, metodología, evaluación, trabajos a realizar, materiales, bibliografía, etc.) remitimos al lector a los documentos del propio Departamento de Didáctica de la Matemática (*http://www.ugr.es/~dpto_did/ docencia.htm#secundaria*), así como a Rico, (1992*a*, 1997*c*) y Flores, (1998*a*).

Cada uno de estos bloques está estructurado en diferentes temáticas curriculares y tópicos de contenidos matemáticos. Entre los diez temas relativos a la línea de desarrollo **A** sobre fundamentos y referencias, mencionamos a continuación los que consideramos, de alguna manera, relevantes para nuestro trabajo:

A.1. El currículo y los objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato.
A.2. Aprendizaje de las matemáticas.
A.3. Enseñanza de las matemáticas: métodos, estilos, medios, materiales y recursos.
A.4. Resolución de Problemas.
A.5. Evaluación en el aula de matemáticas.

En cierta forma, el programa de formación que hemos diseñado constituye una ampliación o profundización parcial (relativa a temas, tópicos y conocimiento didáctico)de la propuesta del Plan de Formación Inicial del Departamento. Más precisamente, constituye una innovación curricular universitaria realizada en el marco de dicho Plan. De este modo abordamos las limitaciones naturales que, grosso modo, tienen que ver con las carencias de información, conocimiento, experiencia y sistematización para organizar y ejecutar los contenidos de conocimientos matemáticos, de una forma distinta que la basada casi exclusivamente, por un lado, en el enfoque formal e hipotético deductivo estándar de la disciplina y, por otro, en las experiencias personales que los alumnos han tenido como tales. Estas aproximaciones son inevitables e incluso necesarias pero no suficientes, porque, según Rico (1992*a*, 1998*b,c*), para realizar el análisis didáctico de un contenido matemático, es necesario considerar, al menos: "los diferentes modos de organización posibles para un tópico; los errores y dificultades que se suelen producir y que la investigación educativa ha venido poniendo en conocimiento; la fenomenología de los conocimientos implicados; estilos de enseñanza más adecuados; los problemas de aprendizaje más importantes que se plantean en cada caso; la evolución histórica y didáctica de cada campo; los materiales, tecnologías y recursos que pueden utilizarse para su estudio; las aplicaciones prácticas; y, seguramente, muchas otras cuestiones importantes".

Esta variedad de temas y tópicos, y la complejidad de las perspectivas necesarias para abordarlos efectivamente y con autonomía profesional, hacen muy difícil el estudio en profundidad de todos ellos. Rico (1992*a*) propone que, "no obstante, se puede hacer una selección adecuada o un estudio con diferentes niveles, de modo que se contemplen los aspectos más importantes a lo largo del curso, pero debe quedar claro que un estudio más completo exigiría mucho más tiempo del asignado a estas asignaturas." En este este estudio hemos restringido los temas, los tópicos y las perspectivas didácticas, en el marco más amplio de las propuestas del Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática.

2.8.4. La formación didáctica inicial de los profesores de matemáticas

De acuerdo con las características de nuestro estudio, consideramos los trabajos sobre formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria referidos al **conocimiento didáctico** (**CD**) base de la **formación didáctica** (**FD**) necesaria para el dominio de las matemáticas escolares y basado también en los diferentes tipos de conocimientos a impartirse en los planes de formación inicial de profesores. Uno de nuestros propósitos es delimitar y caracterizar localmente estos tipos de conocimientos. Sostenemos que el **CD** base de la **FD** sobre el contenido matemático a impartirse en los planes de formación inicial de profesores, debe ser considerado un tipo de conocimiento local, específico y contextualizado. Este tipo de conocimiento debe incluir a su vez, algo más que la intersección entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento sobre teoría curricular. Debe incluir también los distintos tipos de conocimientos didácticos fundamentales y necesarios para realizar el análisis didáctico (véase sección 2.2.3).

Recordemos que uno de los objetivos generales de nuestro estudio es intentar una caracterización de la **FD** base de los profesores de matemáticas en formación, específico y relativo a las tres cuestiones o contenidos organizadores del currículo –la **EC**, los **SR** y las **CG**–, en el contexto local del contenido matemático sobre funciones. Para ello nos hemos basado en la propuesta general de los organizadores. Por las razones expuestas anteriormente, relacionadas con la complejidad, especificidad y condiciones del contexto, los contenidos, los recursos y las tecnologías, y como consecuencia del objetivo general mencionado, hemos diseñado el modelo local-triádico de los organizadores, basado en estas tres cuestiones y que hemos presentado en la Sección 2.3.2. Esta caracterización del conocimiento didáctico, el análisis didáctico y el diseño y desarrollo del modelo local de los organizadores (secciones 2.2.3 y 2.3.2) constituye nuestra propuesta de aproximación a la **FD** base deseada.

III

MARCO METODOLÓGICO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

Para abordar el problema de investigación nos proponemos realizar una indagación exploratoria, descriptiva, interpretativa y evaluativa de un **programa** local de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Este **programa** está inscrito en el marco más general del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemáticas de la Universidad de Granada, y es ofrecido a los estudiantes del 5º año (último curso) de la especialidad de Metodología de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias.

El **programa** ha sido diseñado y desarrollado sobre la base del **modelo local de los organizadores** que hemos descrito en el capítulo anterior. Esta opción nos ha permitido singularizar el programa al focalizarlo y estructurarlo principalmente en tres de las componentes fundamentales de los organizadores del currículo, a saber: la **estructura conceptual** (**EC**) del contenido matemático concreto del que nos ocupamos en este estudio, los **sistemas de representación** (**SR**) usuales para las funciones –el lenguaje natural, los sistemas numérico, gráfico y simbólico-algebraico-;

y las modernas **calculadoras graficadoras** (**CG**). Nuestra expectativa es poder llegar a incidir favorablemente en el diseño autónomo de actividades y la planificación de **unidades didáctica** que integren los tres elementos anteriores; y, en cualquier caso, estudiar las modificaciones e influencias sobre el **conocimiento didáctico** (**CD**) de los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria.

El **programa** pretende integrar simultáneamente en el currículo de matemáticas dos frentes de innovación de gran actualidad en las agendas de investigación contemporáneas sobre enseñanza matemática, los **SR** y el empleo de las nuevas tecnologías de representación con sistemas de cálculo simbólico, aplicados sobre un contenido matemático concreto de la Educación Secundaria -el sistema conceptual sobre la ecuación, el trinomio y la función de segundo grado-, sostenido por un análisis de su estructura conceptual (**EC**). El contenido matemático elegido es susceptible de ser tratado y articulado bajo diferentes modalidades de representación y puede ser sustancialmente enriquecido mediante el apoyo de las utilidades didácticas que ofrecen actualmente las modernas tecnologías de representación y visualización didáctica, como son las **CG** actuales.

Con las limitaciones derivadas de su carácter y de las condiciones de contexto ya indicadas, nuestro problema de investigación cubre dos prioridades básicas en el ámbito de la Educación Matemática: por una parte, constituye un programa de formación inicial (**FI**) a evaluar dirigido a estudiantes de matemáticas entre cuyas principales opciones profesionales está la de llegar a ser profesores de Secundaria en un futuro inmediato; y por otra parte, representa **un proyecto educativo de innovación curricular** en el ámbito universitario.

De acuerdo con la concepción de currículo en que nos basamos en este trabajo, como un programa de formación cuyo objetivo central es dar respuesta a múltiples cuestiones relacionadas con el conocimiento didáctico en torno a un contenido matemático concreto, su enseñanza y aprendizaje, y organizadas estructuralmente teniendo en cuenta múltiples dimensiones (Rico, Castro y Coriat, 1996), el diseño y puesta en marcha del programa de formación requieren de un adecuado y amplio marco de investigación que permita determinar y explicitar los límites y posibilidades de esta intervención educativa. Como resultado de la evaluación del programa, se espera determinar a distinta escala los alcances e implicaciones a que puede dar lugar su puesta en marcha, así como optimizar los recursos disponibles para sacarles el mayor rendimiento posible, tanto durante su desarrollo como en sus eventuales fases posteriores de generalización y naturalización, constituyendo así un proceso permanente de continua innovación curricular.

De esta forma, de los análisis y valoraciones que se realicen en los distintos momentos de implantación del programa cabe esperar recomendaciones y hallazgos de investigación eminentemente prácticos que puedan facilitar la puesta en marcha de nuevas y mejoradas ediciones del plan de intervención; así como algunas consecuencias para el desarrollo profesional de los agentes personales implicados en el proceso formativo. También nos interesa discutir, la forma como estos futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria, son influenciados en sus conocimientos profesionales sobre los mencionados contenidos curriculares, después de acceder al modelo de los organizadores a través del curso que hemos diseñado para tales propósitos. De igual modo, son objeto de nuestro interés las resistencias y carencias más significativas puestas de manifiesto con el proceso de implementación del programa.

Concretamente, nos proponemos valorar las cualidades del proceso de desarrollo del programa en orden a un conjunto de indicadores (objetivos y subjetivos) de calidad y mejora del mismo. Igualmente, nos proponemos caracterizar o tipificar los distintos componentes humanos, disciplinares y tecnológicos, relacionados directamente, tanto con el programa como con las consecuencias (impacto) que se deriven de su implementación.

3.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra **hipótesis general de trabajo**, ya establecida en el apartado 1.4.1, sustenta que si los futuros profesores de matemáticas construyen o acceden al conocimiento didáctico concebido desde la perspectiva del modelo local de los organizadores que hemos diseñado, esto facilitará y enriquecerá sus esquemas de conocimiento, y se reflejará de alguna manera en sus producciones curriculares como futuros profesores de matemáticas.

Antes de precisar el objetivo general (véase sección 1.4.2) y formular los objetivos específicos, conviene aclarar que, en términos generales, en este estudio concebimos la idea de **objetivos** en los dos sentidos propuestos por Fernández-Ballesteros (1996, pp. 49-74): como **objetivos de resultados** y como **objetivos instrumentales**. Esta autora se basa en la distinción que a su vez establece Scriven (1991), entre evaluación basada en los objetivos (o metas) y la evaluación libre de objetivos. El primer caso representa la clásica función asignada a los objetivos en las investigaciones tradicionales y en las programaciones curriculares. En el segundo, el objetivo consiste en el hecho mismo de implantar el programa y detectar y analizar los resultados que se están obteniendo o que se han obtenido en relación con determinados aspectos que han sido llevados a la práctica, con el propósito de evaluar la implementación del programa, inferir conocimientos relacionados con éste y poder así tomar decisiones y proponer recomendaciones para la mejora en sus futuras generaciones.

Basándonos en estas reflexiones y teniendo en cuenta las perspectivas metodológicas del estudio, la concepción de objetivos por la que hemos optado es una concepción abierta, flexible y funcional, es decir, considerados como objetivos o metas de trabajo, y a la vez, orientadores del mismo. En todo caso, coherentemente con las mencionadas perspectivas metodológicas y con la concepción general y diseño del trabajo, tenemos en cuenta también el rigor y las características formales necesarias que los distintos autores consideran que deben satisfacerse como criterios de juicio para los objetivos y las metas de un programa (Alvira, 1991; Fernández-Ballesteros, 1996, Pérez Juste, 2000; De Miguel, 2000). Para nosotros, las características principales de estos criterios, son las siguientes: estar claramente definidos, ser específicos, de fácil reconocimiento, factibles, mútuamente compatibles, operativos, temporalizados, evaluables y apropiadamente cuantificables.

3.2.1. Objetivo general

Basándonos en las discusiones anteriores y en las reflexiones de las secciones 1.4.1 y 1.4.2 acerca de la hipótesis de trabajo, el **objetivo general** de la investigación consiste en **realizar, analizar y evaluar un programa de formación inicial con el propósito de estudiar** (observar sistemáticamente, describir, caracterizar, interpretar, y diagnosticar) **las modificaciones y causas de resistencias hacia éstas modificaciones, experimentados por los alumnos para profesor que participaron en el curso-taller** en el que se concreta el programa de formación.

De acuerdo con el marco curricular y conceptual del estudio, hemos diseñado y desarrollado el curso-taller, basándonos en la pluralidad de los diferentes sistemas de representación y en las múltiples posibilidades de interrelación y conversión entre estos, en torno al conocimiento matemático propuesto. Y como materiales y recursos curriculares de apoyo hemos considerado las utilidades didácticas de las calculadoras graficadoras, concebidas como tecnologías mediadoras de los distintos tipos de representación y de tratamientos que posibilitan integrar y establecer interrelaciones y conversiones entre estos diferentes tipos de representación en juego en cada situación de enseñanza-aprendizaje relacionada con la estructura conceptual considerada.

La experiencia desarrollada durante los estudios piloto (primeras generaciones del programa) así como las necesidades detectadas y la diversidad de conocimientos que fueron necesarios poner en funcionamiento por parte de todos los participantes para su realización, resultaron ser tantos y de tal complejidad, que los responsables nos vimos en la necesidad de tomar decisiones y dar prioridad a unas cuestiones sobre otras, de tal modo que los objetivos definitivamente formulados resultaran, efectiva y razonablemente alcanzables.

Basándonos en las consideraciones anteriores y en las cuestiones fundamentales que son marco de nuestro estudio, el **objetivo general de la investigación** se concreta al proponernos evaluar el programa mediante el análisis comparativo de la planificación/implementación, y la descripción, caracterización, interpretación y valoración, de la manera como afectan o repercuten sobre los esquemas de pensamiento y conocimiento didáctico profesional de los alumnos participantes, los diseños y estrategias de formación desarrollados en el curso-taller asociado a cada generación del programa.

3.2.2. Objetivos específicos

De acuerdo con las características generales del estudio y del programa, así como con los objetivos generales de la investigación y metas del programa, los objetivos específicos (**O.*n***, *n=1,2,3,4,5*) de la investigación son los siguientes:

- O.1. Realizar (diseñar, planificar, implementar), analizar y evaluar objetiva y subjetivamente un **programa de formación inicial** de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, concretado en un curso-taller. El curso-taller se concreta en los tópicos específicos del contenido matemático elegido y se basa en las cuatro cuestiones centrales del estudio (**EC**, **SR**, **CG** y **FD**) estructuradas de acuerdo con la propuesta del **modelo local de los organizadores** que hemos descrito sucinta y previamente y que presentaremos más ampliamente en el siguiente capítulo.

- O.2. Observar, identificar y caracterizar la forma como los futuros profesores de matemática de Secundaria utilizan e integran la **EC**, las **CG** y los **SR** en el diseño de propuestas curriculares sobre funciones, concretadas en la planificación y presentación de actividades didácticas. Estas actividades didácticas se refieren a: Primero, elección de los conceptos o procedimientos más adecuados para la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión; segundo, determinación de las dificultades o los principales errores que se presentan en la enseñanza o aprendizaje sobre del contenido matemático; tercero, diseño y propuesta de actividades para la introducción, motivación y desarrollo del tema elegido; y cuarto, elaboración de una propuesta de evaluación sobre dichos temas.

- O.3. Observar, analizar, interpretar y caracterizar el impacto del programa sobre el sistema de ideas (concepciones) relativo al conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas. Con otras palabras, se trata de estudiar y evaluar las repercusiones que tienen sobre los alumnos para profesor que participen en el curso-taller, los distintos elementos organizadores del currículo.

Para ello, prestaremos especial atención a las maneras explícitas de comprender las estructuras conceptuales, las representaciones usuales de los diferentes elementos del contenido matemático, los dominios procedimentales y las predisposiciones actitudinales que tienen o alcanzan en relación con dicho contenido matemático, la pluralidad e interrelación de los diferentes SR y las tecnologías con las cuales vamos a trabajar.

- O.4. Identificar, describir y valorar las cualidades del programa en relación, tanto con los fundamentos curriculares, conceptuales y metodológicos que lo enmarcan (referidos a la propuesta y modelo local de los organizadores), con los procesos de desarrollo del programa y del estudio mismo, como con el marco curricular e institucional (Plan de Formación Inicial del Departamento) en el que se inscribe. Y formular propuestas de cambio y mejora pertinentes de cara a una futura generación natural y estándar.

- O.5. Profundizar en el conocimiento curricular y la metodología de investigación sobre las cuatro cuestiones centrales en las que se basa y en torno a las cuales se desarrollará este estudio.

En la Figura 3.1 siguiente presentamos de manera resumida la relación de correspondencia entre las cuatro cuestiones fundamentales de nuestro estudio y los distintos objetivos específicos.

Figura 3.1.
Relación de correspondencia entre cuestiones fundamentales –EC, SR, CG, FD y el programa (PR) mismo - y los objetivos específicos (*O.n*) de la investigación.

EC	SR	CG	FD	PR
O.2	O.2	O.2	O.2	O.1
O.3	O.3	O.3	O.3	
		O.4	O.4	
O.5	O.5	O.5	O.5	O.4

3.3. CONTEXTO, PARTICIPANTES Y RECURSOS

El plan de formación correspondiente a nuestro programa lo hemos diseñado y desarrollado enmarcándolo en el Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, el cual es impartido a los alumnos del último curso de la especialidad de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y que hemos descrito en la sección 2.8.3. De acuerdo con esto, nuestro programa lo hemos concretado en un curso-taller ofrecido con carácter opcional y voluntario a los alumnos de último año de la Carrera, está dirigido a futuros profesores de matemáticas del currículo de Educación Secundaria.

3.3.1. Contexto: El curso-taller

El curso-taller: **"Calculadoras graficadoras y enseñanza de funciones en el Currículo de Secundaria"**, lo diseñamos y desarrollamos con el objetivo general de facilitar y garantizar el acceso de los alumnos participantes al modelo sistémico de los organizadores para el currículo de matemáticas de Enseñanza Secundaria, mejorar su conocimiento didáctico y desarrollar sus capacidades o competencias en el diseño de actividades didácticas. Para ello, nos basamos en los documentos del marco curricular correspondiente y en las ideas de los miembros del equipo de investigadores y expertos consultados, respecto al contenido conceptual, procedimental y actitudinal, las perspectivas curriculares de la Educación Secundaria Obligatoria en España (ESO) y las opciones o posibilidades del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este curso, lo hemos desarrollado mediante una modalidad de seminario-taller, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, y lo hemos ofrecido e impartido, exclusivamente a estudiantes de último año de la especialidad Metodología de la carrera de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la misma Universidad.

El curso-taller lo realizamos en su totalidad, es decir, cubriendo todo el programa previsto, en tres ocasiones, con una duración de 30 horas en su primera edición y 40 horas en las dos restantes. Cada curso lo desarrollamos durante 10 días, en sesiones de 3 y 4 horas por día, respectivamente. En cuatro ocasiones anteriores realizamos conferencias-taller de menor duración (4 y 8 horas, durante 1 y 2 días, respectivamente), pero su interés para esta investigación ha sido subordinado, por cuanto no se ha realizado recogida de datos estructurados, aunque sí han contribuido al ensayo y diseño de las tareas y actividades del programa.

Los responsables directos del curso-taller, en su diseño y realización, fuimos los integrantes del equipo investigador. Todos los miembros de este equipo tuvimos que desempeñar diversos papeles, como diseñadores, profesores, observadores, investigadores y evaluadores. A lo largo de este capítulo y, especialmente, en el Capítulo IV, presentaremos una descripción mucho más detallada del diseño, la estructura y la implementación del programa y de su principal concreción, el curso-taller. Sin embargo, es necesario anticipar que, como programas de formación con entidad propia, este seminario-taller o unidad formativa, caracterizado por un contenido matemático –sistema conceptual en torno al trinomio, la ecuación y la función de segundo grado-, el enfoque didáctico y el plan de actuación concebidos y desarrollados, se basó en un tratamiento no convencional de los contenidos, y en un enfoque socioconstructivista y cooperativo de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Este seminario, constituye la concreción del programa a evaluar, con respecto a su adecuación a las características de los destinatarios, y a las necesidades y demandas sociales, institucionales y contextuales de los agentes o participante –alumnos, profesores e investigadores- vinculados al estudio, a los recursos y materiales disponibles, a su ejecución y a los resultados obtenidos.

3.3.2. Participantes

Tal y como lo hemos venido mencionando, los participantes o agentes del estudio y del programa a evaluar son: (a) los alumnos de último curso del Plan de Formación Inicial de Profesores de la Licenciatura de Matemáticas que voluntariamente decidan participar en nuestro programa; y (b) los miembros del equipo de investigadores integrado por los dos directores de la tesis y los observadores externos, profesores y alumnos del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Dado que el procedimiento de asignación de los participantes al curso-taller tiene un carácter de voluntariado, puesto que son los propios alumnos de *motu propio* los que se han inscrito en los tres cursos-taller. Incluso, en uno de ellos debieron costearse la matrícula al curso. Podemos afirmar que se ha optado por un tipo de selección no probabilístico de los participantes, denominado en la literatura metodológica como un caso típico de **"muestreo casual o incidental"** (Gall, Borg y Gall, 1996). La ventaja de este tipo de procedimientos de selección de los agentes participantes es que, en buena medida, el plan de formación al que voluntariamente se han acogido, responde a un nivel de demandas específicas muy alto, y por lo tanto tiene asociado una serie de expectativas y motivaciones que también están por encima de lo común.

Trabajar con grupos de individuos de estas características tiene unos valores añadidos de riqueza conceptual y calidad en las producciones que no podríamos conseguir con cualquiera de los procedimientos habituales del muestreo probabilístico. El nuestro es un tipo de selección de los participantes muy adecuado para grupos pequeños, ya que si la potencia de un muestreo estadístico ortodoxo reside en la selección de una muestra verdaderamente aleatoria y representativa que permita hacer generalizaciones a toda la población (de alumnos del programa de la Licenciatura en Matemática), la potencia de una selección de sujetos de esta naturaleza, consiste precisamente en disponer de individuos que realmente puedan enriquecer el problema de investigación con aportaciones de la mayor calidad posible (González-Río, 1997).

Por otra parte, teniendo en cuenta la modalidad metodológica del estudio, a los investigadores y observadores externos los consideramos participantes o agentes del programa, toda vez que también, asumimos roles de observadores participantes. De acuerdo con lo anterior, en la primera edición e implantación del programa, correspondiente con el primer ensayo empírico y lo que hemos llamado la primera generación del programa, los participantes fueron: 19 estudiantes, 2 investigadores (el Dr. Luis Rico y el doctorando Evelio Bedoya) y un observador (el Dr. Isidoro Segovia). En la segunda edición o generación del Programa, correspondiente al segundo ensayo piloto, el número de participantes fue de: 13 estudiantes, 2 investigadores (el Dr. Luis Rico y el doctorando Evelio Bedoya) y una observadora (la Dra. Encarnación Castro). Y en la tercera generación del Programa, correspondiente al estudio empírico, los participantes fueron: 10 estudiantes, 2 estudiantes asistentes irregulares, 3 investigadores (los Dres. Luis Rico y José Gutiérrez, y el doctorando Evelio Bedoya) (Véase Figura 3.2).

Figura 3.2.
Relación de participantes en cada una de las tres generaciones del programa

GENERACIONES DEL PROGRAMA	Periodo académico	No. de estudiantes	No. de investigadores	No. de observadores
1ª generación: primer ensayo piloto	97-98	19	2	1
2ª generación: segundo ensayo piloto	97-98	13	2	1
3ª generación: estudio empírico	98-2000	10	3	2

3.3.3. Recursos materiales, tecnológicos y económicos

Para poder desarrollar la investigación en general y las distintas generaciones o ediciones del programa y de los respectivos cursos-taller hemos contado, naturalmente, con recursos humanos imprescindibles, tecnológicos, materiales y económicos. Los recursos materiales y económicos, necesarios para poder desarrollar un trabajo de esta naturaleza, fueron suministrados, aparte de los propios de los participantes y del equipo de investigadores, por las instituciones vinculadas directamente con nuestro trabajo: Universidad del Valle y Universidad de Granada.

Por otra parte, también hemos contado con el apoyo en recursos tecnológicos por parte del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de la empresa *Texas Instruments*. Durante todo el desarrollo de cada curso-taller correspondientes a cada una de las generaciones del programa, cada uno de los alumnos, profesores, investigadores y observadores participantes dispuso de dos calculadoras graficadoras, una modelo TI-83 y otra modelo TI-92 (véase Anexo 2), con sus respectivos accesorios periféricos de retroproyección (*View-Screen*), de conexión al ordenador (software y cables *TI-GRAPH-LINK*) y de interconexión entre distintas calculadoras (cable de enlace unidad a unidad). Todos estos recurso tecnológicos fueron facilitados en servicio de préstamo por parte de la empresa *Texas Instrument* y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Sin esto no habría tenido sentido ni hubiera sido posible la realización de nuestro programa ni la investigación. Más adelante, cuando describamos el programa y los cursos-taller respectivos (Capítulo IV), presentaremos una descripción de las principales opciones y utilidades técnicas y didácticas de las tecnologías utilizadas en nuestro trabajo.

3.4. MARCO METODOLÓGICO

> La evaluación de programas puede servir a estos dos grandes objetivos: la mejora de la calidad de la acción educativa dentro de cada aula y cada centro, y la creación de teoría. [...] Dentro de la propia Pedagogía como ciencia de la Educación cabe hablar de 'objetos' susceptibles de ser abordados multi o pluridisciplinarmente, lo que exigiría que, para alcanzar un acercamiento mínimo y suficiente a tan compleja realidad, se acudiera a unos planteamientos metodológicos acordes con la complejidad y diversidad de su objeto. [...] El principio de complementariedad reconoce que ante realidades complejas, el mejor acercamiento no reside en la elección de una entre varias opciones, ni siquiera en elegir la mejor, sino en abordarlas desde enfoques metodológicos complementarios, siempre que lo permita la formación de los estudiosos, el tiempo y los recursos disponibles. (Pérez Juste, 2000, p. 265).

3.4.1. Enfoque metodológico

La metodología de evaluación de programas educativos ofrece a nuestro problema objeto de estudio un marco conceptual y procedimental apropiado sobre el cual fundamentar y organizar nuestras decisiones operativas de investigación. Después de más de medio siglo de investigación evaluativa centrada en los programas educativos

(Scriven, 1967; Alvira, 1991; Pérez-Juste, 1994*a,b*, 1997, 2000; Forns y Gómez, 1995; Fernández-Ballesteros, 1996; Martínez-Mediano, 1998; De Miguel, 1999, 2000), se han conseguido delinear algunos criterios o principios básicos para este tipo de estudios, entre los que destacamos los siguientes:

- Un programa es una intervención estructurada en la que se han planificado sistemáticamente recursos, tiempos, tareas, agentes, contextos, etc.

- Un programa debe ser evaluado de forma amplia, con respecto a la extensión de la implantación y de las medidas de análisis. El análisis del éxito de un programa y de sus beneficios, incluso de los no previstos inicialmente, sólo es posible si el planteamiento de la valoración se hace de forma amplia.

- Cada programa debería desarrollar sus propias medidas para la evaluación de la intervención. Las medidas preestablecidas pueden adaptarse bien a la verificación de algunos objetivos del programa y ser inadecuadas para otros.

- La evaluación de un programa debe integrar de manera complementaria, el análisis del proceso y del producto. Este supuesto está implícito en el modelo de evaluación de Stufflebean y en el de Scriven. La evaluación debe dar cuenta no sólo de si el programa tiene éxito en su producto final, sino en todas sus fases, identificando los elementos (aspectos didácticos, organización de contenidos, factores del educador, etc.) que intervienen en la consecución de los logros o del éxito final. El análisis de estos elementos permite inferir las razones, o supuestas líneas de causalidad, por las cuales un programa obtiene el éxito deseado.

- De los resultados de la evaluación de un programa se deben generar: descripciones sobre su funcionamiento y recomendaciones o prescripciones para su mejoramiento. Este aspecto refleja dos ideas: por una parte, se defiende que conviene analizar el propio proceso del programa mediante un tipo de evaluación formativa (Scriven, 1967), y por otra, se argumenta que, para prescribir la realización de determinadas acciones y tareas de enseñanza-aprendizaje, conviene haber generado algún tipo de conocimiento causal de las variables que conducen al éxito. Ambos aspectos son contemplados conjuntamente bajo la idea de una evaluación prescriptiva.

Martínez Mediano (1998), citando a Scriven (1991), resume de la siguiente manera las dos principales componentes que caracterizan de forma general la naturaleza de la evaluación de programas como metodología y disciplina:

> La evaluación no es sólo una mera acumulación y síntesis de datos relevantes para la toma de decisiones. Digamos que éste es uno de los componentes de la evaluación y uno de sus propósitos. El otro componente, y previo al anterior, es el de las premisas o criterios evaluativos que verifican los valores relevantes y las normas elegidas para la realización de la evaluación (p. 75).

De Miguel (1999), argumenta que si la evaluación de programas, además de las dos funciones tradicionales relacionadas con la "rendición de cuentas" de los programas y planes de formación y con la mejora del programa, nos ayuda a alcanzar una comprensión más profunda de las cuestiones específicas que son objetos de estudio y de evaluación en un determinado programa o intervención, esto significa que el proceso nos aporta conocimientos y, en esa medida, también estaríamos "contribuyendo al progreso científico". De acuerdo con esto, podemos considerar la evaluación, además de sus metas tradicionales y ya clásicas, también como un proceso científico de búsqueda y desarrollo de conocimientos en relación con los procedimientos y factores que facilitan, impulsan y dificultan el cambio y la transformación de determinados procesos, hechos, conceptos y actitudes en el contexto de la investigación educativa y de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

De Miguel (1999), refiriéndose a lo que considera los dos temas de reflexión más fundamentales y de mayor actualidad acerca de la evaluación de programas, esto es, la evaluación como proceso de desarrollo de conocimientos y su compromiso con el cambio social, así como la cuestión sobre la superación del debate acerca de los paradigmas metodológicos afirma lo siguiente:

> Más allá del análisis y valoración de los problemas y requisitos que conlleva el diseño e implementación de un programa, debemos tener claro que lo verdaderamente importante en una investigación evaluativa es profundizar en la descripción y explicación de los procesos de intervención que se implementan con el fin de promover la transformación social [y curricular], y de los resultados que se obtiene a partir de dichos procesos. [...] Las características específicas de los programas y de los procesos

> que conlleva su diseño, implementación y evaluación nos obliga normalmente a considerar fenómenos cuantitativos y cualitativos por lo cual es habitual abordar los procesos evaluativos con planteamientos integradores y enfoques multimétodos dejando la polémica paradigmática en un segundo plano (p. 346).

La pertinencia de la metodología de evaluación de programas para el estudio del problema de investigación que nos ocupa, o sea la evaluación de un plan local de formación inicial de profesores de matemáticas, previamente diseñado y planificado, ha hecho factible la mejora progresiva de varias generaciones del curso-taller, adaptando el contenido y las tareas, ajustando los ritmos y tiempos y mejorando los instrumentos de trabajo, de análisis y evaluación.

3.4.2. Diseño de la investigación

El tipo de diseño, mixto, por el que hemos optado en nuestro estudio, es considerado como un **diseño susceptible de complementariedad metodológica**, pluralista, integrador y participativo (Stufflebeam y Shinkfield, 1987; Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996; Forns y Gómez, 1996; Apodaca, 1999; De Miguel, 1999, 2000); y está orientado especialmente a la toma de decisiones en la práctica. En estos diseños, la investigación es utilizada tanto para el perfeccionamiento del propio programa en curso, cuanto para reflexionar sobre el mismo y enjuiciar su valía y potencialidad como plan formativo. En definitiva, complementar los métodos de manera que expliquen los acontecimiento y a la vez resuelvan óptimamente los problemas de mejora sustantiva de programas y contextos específicos. Por eso se plantea cada vez más la necesidad de complementariedad e integración entre los distintos métodos disponibles (Bericat, 1998; Pérez-Juste, 2000; De Miguel, 2000).

En el caso que nos ocupa, desde el punto de vista metodológico este proyecto de investigación consta de un conjunto de decisiones, fases y secuencias que requieren del empleo de técnicas e instrumentos tanto cuantitativos como cualitativos. Por tanto el diseño es más un conjunto organizado y secuencializado de pasos a dar a lo largo de la investigación, susceptible, en todo momento, de revisión y mejora, que un esquema de intervención inamovible a la manera de los diseños típicos en la investigación experimental. Un marco conceptual útil y más amplio para describir la complejidad y pluralidad del tipo de diseño que hemos adoptado, basado, en términos generales, en dos tipologías de enfoques particulares de investigación: la investigación evaluativa de programas educativos, y la investigación-acción aplicada a la educación, lo podemos encontrar complementariamente en: Alvira (1991), Pérez-Juste (1994*a,b*), Forns y Gómez (1995), Fernández-Ballesteros (1996), Castro (1995*a,b*), Romero (1997), Pérez-Juste (2000) y De Miguel (2000).

Parte de nuestro diseño de investigación puede ser considerado en la terminología clásica como un diseño preexperimental preprueba-postprueba, sin grupo de control ni aleatorización (Campbell y Stanley, 1982), donde se ha llevado a cabo una observación inicial (OI) y final (OF) múltiple: escala de actitudes (OI_1, OF_1) y multitarea sobre dominio de conocimiento didáctico y formación didáctica (OI_2, OF_2). El mismo diseño se ha repetido en las tres generaciones del curso-taller impartido, aunque el análisis sistemático de los datos se ha concentrado en el último. Un esquema del tipo de diseño empleado es el siguiente (Figura 3.3.):

Figura 3.3.
Esquema del tipo de diseño de investigación

GENERACIÓN DEL PROGRAMA	OBSERVACIÓN INICIAL	→	CURSO-TALLER	→	OBSERVACIÓN FINAL	TIPO DE ESTUDIO
1ª G	$OI_1 - OI_2$	→	Curso-taller 1	→	$OF_1 - OF_2$	Estudio previo 1
2ª G	$OI_1 - OI_2$	→	Curso-taller 2	→	$OF_1 - OF_2$	Estudio previo 2
3ª G	$OI_1 - OI_2$	→	CURSO-TALLER 3	→	$OF_1 - OF_2$	ESTUDIO EMPÍRICO

Este diseño ha sido complementado con un diseño de investigación abierto basado en una recogida de información continua con observaciones de proceso centrado en los análisis de los cuadernos de los estudiantes y de los investigadores, la grabación de vídeos de todas las sesiones de cada curso-taller y las grabaciones de audio de las reuniones periódicas del equipo investigador. Por tanto, el estudio lo hemos planteado y organizado mediante un diseño multimétodo de carácter descriptivo y evaluativo, puesto que de él se derivan decisiones de innovación y cambio curricular aplicados al contexto universitario. No hicimos selección al azar de los participantes, sino que estos decidieron su participación voluntariamente, tanto en las fases de los ensayos pilotos del programa como en el estudio empírico; si bien los ensayos pilotos y el estudio empírico se realizaron en aulas en condiciones experimentales, es decir no se realizaron en el contexto natural de los participantes.

Mediante una encuesta estandarizada de actitud y una multitarea se constató el estado inicial de los alumnos participantes del estudio empírico, así como de los ensayos piloto, en relación con sus creencias y actitudes, y esquemas de conocimiento didáctico profesional, respectivamente, en el contexto de los elementos del modelo de los organizadores propuesto. Hacia el final del curso, volvimos a aplicar la misma encuesta de actitud y les pedimos que con base en la tarea inicial, presentaran una tarea final que corrigiera, mejorara o ampliara la tarea inicial. Antes y durante el desarrollo del estudio empírico, correspondiente a la implantación de la tercera edición o generación del programa, el equipo de investigadores realizamos un seguimiento y evaluación sistemática del proceso, con el propósito de efectuar los ajustes oportunos y confirmar los diferentes aspectos de la planificación y de la ejecución del programa que consideramos necesarios. Después de finalizar el curso, realizamos los análisis y evaluaciones definitivas sobre los distintos aspectos relacionados con los objetivos y metas propuestos. Para realizar estos análisis y evaluaciones en las distintas fases empleamos una amplia diversidad de técnicas que describiremos más adelante.

Pero, teniendo en cuenta la complejidad que lleva asociada el desarrollo de innovaciones en el contexto universitario y las características de nuestro estudio, se hace necesario pues, considerar e integrar las aportaciones de los diferentes métodos de investigación educativa al uso. Tal y como lo hemos dicho anteriormente, el modelo integrador y pluralista que hemos adoptado es una tendencia creciente en el panorama actual de la investigación educativa y evaluativa. La integración complementaria de diferentes modelos metodológicos, permite dar cuenta no sólo de los resultados en su forma final, sino también, de todas las fases, etapas y procesos seguidos a lo largo de la investigación. El esquema metodológico de la investigación-acción, su estructuración en fases y la triangulación múltiple han permitido darle cobertura a las diferentes fases de implantación del programa y a las diferentes técnicas de recogida de información desplegadas.

3.4.3. Aportes de la metodología de investigación-acción

Las características particulares de nuestro proceso de investigación, por una parte, y por la otra, la instrumentalización metodológica necesaria de la práctica evaluativa y las características particulares del programa a evaluar, nos ha llevado a los miembros del equipo de investigación, integrado por los dos Directores de la tesis como investigadores asociados, por un observador externo (un alumno del Doctorado en Didáctica de la Matemática) y por el doctorando como investigador principal, a la conclusión de la necesidad de ampliar, complementaria e integralmente, el modelo de investigación evaluativa que hemos adoptado con una adaptación, también particular, del modelo de investigación cualitativa en la acción propuesto por Castro (1995*a*, pp. 79-86) en su tesis doctoral.

En esta obra, Castro (1995*a*), basándose en autores como Kemmis y McTaggart (1998), McNiff (1991), Halsey (1972) y Elliot (1990) (todos citados por la autora), desarrolla un modelo de investigación-acción (**I-A**) que viene bien para hacer una adaptación a nuestro diseño, y que podríamos resumir de la siguiente manera:

(a) La I-A es un ejercicio unificado y un potente método de unión entre la teoría y la práctica, a través de una de sus características esenciales que consiste en la idea de reflexión sobre la práctica y en la práctica.

(b) Es la intervención a pequeña escala en el funcionamiento del mundo real y un examen próximo de los efectos de tal intervención.

(c) Es una práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella. Las prácticas sociales se consideran como actos de investigación como teorías en la acción o pruebas hipotéticas que han de evaluarse en relación con su potencial para llevar a cabo cambios apropiados.

(d) En la I-A se reflexiona, se analizan, se evalúan y se interpretan las situaciones y acciones educativas experimentadas por los profesores y participantes con propósitos de transformarlas y mejorarlas.

Entre las diferentes opciones que considera y analiza Castro para definir su propio modelo, elegimos para la realización de nuestro trabajo una estructura no lineal y flexible, formada por las siguientes etapas o fases:

- ✓ diagnóstico,
- ✓ diseño y planificación de un plan,
- ✓ actuación para poner el plan de acción en práctica,
- ✓ observación,
- ✓ reflexión, y
- ✓ evaluación.

Las propiedades de flexibilidad y no linealidad se refieren a que estas etapas, no tienen que ocurrir necesariamente todas a la vez ni en estricta secuencia. Parafraseando a Castro, estas fases se suceden entrelazadas formando una especie de espiral helicoidal con distintos niveles o “peldaños”, en cada uno de los cuales se sucede, como en una estructura fractal, el mismo proceso básico.

Para conseguir una mejor adaptación a nuestro proceso de investigación, agruparemos estas seis etapas en tres fases, coincidiendo, de este modo natural con el rasgo común de las intervenciones evaluativas de programas de ultima generación:

- **Fase inicial** (**F-I**): De diagnóstico, diseño y planificación del trabajo. Durante esta fase se ha iniciado el estudio y evaluación de la factibilidad o viabilidad del programa, así como el diseño y planificación acerca de cómo desarrollar el programa y los cursos-taller asociados y el plan a seguir para la recogida y análisis de los datos en función de los objetivos y fines del programa; también, se han seleccionado las distintas actividades, tanto didácticas como de desarrollo del curso-taller y del programa en general, y se ha establecido el calendario y programación general del trabajo.

  Esta es una fase crucial pues nos encontramos ante el reto de diseñar y planificar el desarrollo y evaluación de un programa que aporte una información que resulte relevante, y a la vez, planificar de manera apropiada el tiempo y los recursos personales, tecnológicos, materiales y económicos necesarios. En esta fase, como dice Pérez-Juste (2000, p. 280), "la investigación debería orientarse a identificar los contenidos mínimos necesarios para una evaluación que permita ser valorada como *suficiente*, dejando fuera todos aquellos otros aspectos que podríamos considerar *superfluos*. Se trata, en definitiva, de elaborar propuestas centradas en lo esencial, suficiente y factible."

- **Fase intermedia o de ejecución** (**F-E**): De actuación e implementación del programa. Esta fase comprende a su vez dos subfases intermedias **F-E1** y **F-E2**, correspondientes y asociadas, sucesivamente a cada uno de los modelos de calculadoras graficadoras con las que trabajamos durante el desarrollo del programa, las calculadoras graficadoras de la empresa *Texas Instruments* modelos TI-83 y TI-92, respectivamente.

  Esta es una de las etapas más importantes del proceso de evaluación de un programa, toda vez que, además de la permanencia y continuidad necesaria del proceso evaluativo, durante esta etapa se observa y se pone a prueba el grado de cumplimiento y adecuación de lo diseñado y planificado, es decir se pone a prueba y se recoge la información relevante para la evaluación de la implementación del programa. Esta observación y evaluación permanente por parte del equipo investigador permite revisar, reorientar y reajustar las sucesivas planificaciones previstas. Durante esta fase, "la evaluación de los programas se deberá centrar sobre los procesos de instrumentación de las estrategias de intervención ya que son las contingencias que se establecen en cada caso las que –en última instancia- determinan las diferencias" (De Miguel, 2000, p. 294). De Miguel concluye que:

  > Este hecho ha supuesto que los enfoques relativos a la evaluación de programas desplazaran el foco de la reflexión hacia los problemas prácticos que conlleva toda estrategia de intervención ya que son los procesos los que, esencialmente, determinan la mayor o menor eficacia de los programas. [...] Asumir esta distinción implica un cambio de enfoque sobre el concepto de programa ya que puede ser tipificado como una tecnología instrumental que debe ser diseñada y modificada de forma constante en función de su utilidad en relación con los objetivos establecidos (p. 294).

- **Fase final** (**F-F**): De observación, organización de la información y de reflexión, análisis y evaluación definitiva del programa y del proceso de investigación general. Durante esta fase se obtienen los datos e información finales que, al contrastarlos con los iniciales e intermedios, nos permitirán determinar y valorar la calidad y utilidad de los resultados finales de la investigación, así como el impacto generado por el programa. En esta fase se producen también las conclusiones y propuestas definitivas de mejora, generalización y naturalización del programa.

En el proceso global de la investigación, de acuerdo con el diseño de nuestro modelo, cada una de las etapas se suceden reiterando el proceso trifásico, como en la propuesta de Castro (1995*a*), entrelazadas en distintos planos o niveles, como en una estructura fractal, tal como intentamos ilustrarlo de forma esquemática en la Figura 3.4 que presentamos más adelante en la página 124.

En síntesis, metodológicamente, el **modelo de investigación-acción evaluativa** que hemos adoptado, corresponde con un **diseño recursivo y multifase**, caracterizado básicamente de acuerdo con los siguientes términos:

- Es una investigación de carácter exploratoria, evaluativa y participativa.
- Se trata de evaluar y validar empíricamente un programa local en el contexto de un Plan de Estudio en curso.
- Las diferentes generaciones o ediciones del programa a evaluar se experimentan mediante una modalidad de seminario o curso-taller.
- Es una reflexión en la práctica tendiente a hacer propuestas de mejora del currículo.
- No es un estudio de carácter teórico.
- Una adaptación propia de las aportaciones de los enfoques de investigación que hemos adoptado, caracterizan nuestro diseño como trifásico y recursivo.
- El modelo o diseño de nuestra propuesta metodológica de investigación-acción evaluativa se puede ilustrar esquemáticamente mediante la figura anterior (Figura 3.4.).
- Otra dos características fundamentales del diseño metodológico de la investigación son su carácter cualitativo y la multitécnica de ***triangulación***.

De los cuatro tipos básicos de la multitécnica de ***triangulación*** (Romero, 1997, pp. 28-29), nosotros practicamos las siguientes: (a) **triangulación de investigadores**, entre los cuatro integrantes básicos del equipo investigador (Bericat, 1998, p. 147), así como con los expertos entrevistados; y (b) **triangulación de fuentes de datos**, al usar distintas fuentes y técnicas de obtención de datos, tales como documentos de diferentes procedencias, tareas, cuadernos de trabajo y otras producciones escritas y orales de los alumnos participantes, encuestas de opinión y escalas de actitud, grabaciones en vídeo y audio, entrevistas a expertos y notas de campo de los investigadores y observadores.

3.5. TEMPORALIZACIÓN Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Tal y como lo hemos señalado en los apartados anteriores, uno de los objetivos de la investigación consiste en evaluar el programa de formación que hemos diseñado mediante el análisis comparativo de la planificación-implantación, y la descripción, caracterización, interpretación y valoración, de la manera como afectan o repercuten sobre los esquemas de pensamiento y conocimiento didáctico profesional de los alumnos participantes, los diseños y estrategias de formación desarrollados en el curso-taller en el que se concreta el programa de formación propuesto.

En concreto, la metodología de evaluación del programa, consiste en: (i) realizar un balance analítico y crítico entre la planificación del programa y su proceso de implementación; y (ii) de acuerdo con los objetivos de resultados, es decir, los objetivos no instrumentales, la metodología consiste en analizar con detenimiento, con todo rigor, los resultados y conclusiones a través de triangulaciones de datos y agentes, de la documentación y la información relevantes del programa, obtenidas mediante toda la batería de técnicas e instrumentos cualitativos y cuantitativos que hemos empleado.

Teniendo en cuenta los dos casos mencionados en el párrafo anterior y el hecho de que el estudio que nos proponemos realizar es de carácter cuasiexperimental, en el primer caso, la variable independiente correspondería con la planificación, concretada en el programa y cada uno de los guiones de las sesiones del estudio empírico, y la variable dependiente correspondería con la implementación del programa, lo que realmente se ejecutó, puesto de manifiesto en los documentos de observación, registro y seguimiento de las actividades realizadas durante el desarrollo del estudio empírico. En el segundo caso, las variables independientes corresponden con las intervenciones programadas de acuerdo con los objetivos y contenidos didácticos de cada una de las sesiones de trabajo del curso-taller; y las variables dependientes corresponden con el "nivel" del cambio, modificación o evolución del sistema de conocimientos (conceptual, procedimental y actitudinal) relacionados con la estructura conceptual (**EC**) en estudio, los sistemas de representación (**SR**), las calculadoras graficadoras (**CG**) y el conocimiento didáctico (**CD**) reflejado en las producciones, intervenciones y propuestas de tareas y unidades didácticas realizadas por los alumnos participantes.

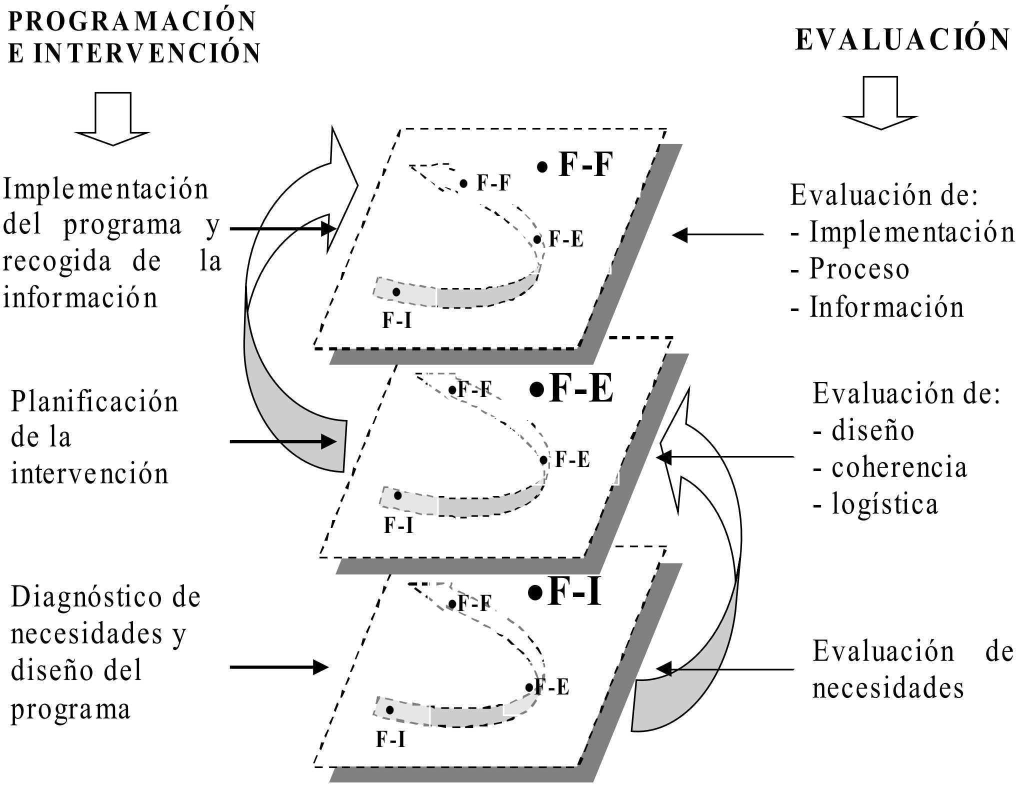
De todas maneras, conviene aclarar algo que está implícito en los objetivos específicos de la investigación formulados anteriormente, y que es típico de una metodología de investigación exploratoria, descriptiva, cualitativa y evaluativa como la nuestra: Para estudiar el cumplimiento de algunos de estos objetivos se hace necesario identificar previamente las variables pertinentes de entrada (*input*) y de proceso, relacionadas, tanto con la aplicación de distintos aspectos del programa, como con los resultados de los diferentes agentes que pongan en evidencia los resultados previstos, explícita e implícitamente en dichos objetivos. Por lo cual, algunos de estos objetivos se podrían traducir como de identificación de variables que permitan realizar los análisis y evaluaciones deseados.

3.5.1. Estructura y fases de implementación del programa

Como quiera que hemos optado por un modelo de evaluación de programas y un modelo de indagación basado en I-A, susceptible de valoraciones y toma de decisiones en la práctica, frente al esquema tradicional de desarrollo lineal que parte desde la definición del problema hasta llegar a la etapa final de evaluación global del programa, nosotros nos hemos inclinado por un esquema de desarrollo donde la evaluación pueda realizarse durante los diferentes momentos de su realización. De este modo, basándonos en nuestra adaptación de las propuestas de Alvira (1991) de "entrelazar de un modo continuo en un proceso de retroalimentación permanente", evaluación y programación (planificación e intervención) y de Castro (1995*a*), de proceso de I-A multifase y en espiral con distintos "peldaños", la estructura básica de temporalización de nuestro programa se puede representar mediante el esquema de la Figura 3.4.

Figura 3.4.

Esquema de la estructura multifase del modelo de investigación-acción evaluativa y realización y evaluación del programa. Cada plano corresponde con una fase. A la vez, en cada plano se presentan las mismas.



Este esquema nos permite ver las dos características principales del proceso de evaluación que hemos adoptado: la primera tiene que ver con la integración en el propio estudio de las partes interesadas en el programa y su evaluación. Esta intervención tiene lugar durante todos los momentos del proceso de desarrollo del Programa. Y, la segunda, se refiere a la utilización de los resultados de cada una de las fase para la toma de decisiones dirigidas a la fase siguiente, completando y dejando abierto el ciclo intervención/evaluación correspondiente a fases consecutivas.

3.5.2. Fases de obtención y análisis de la información

Aunque, de acuerdo con la metodología que hemos seguido, se contempla la opción de obtención de la información y su análisis y valoración durante cada una de las fases del desarrollo del programa, la tercera fase o fase final (F-F), corresponde con el momento actual de tratamiento y análisis de toda la información recogida durante los dos ensayos pilotos y, especialmente, durante el estudio empírico.

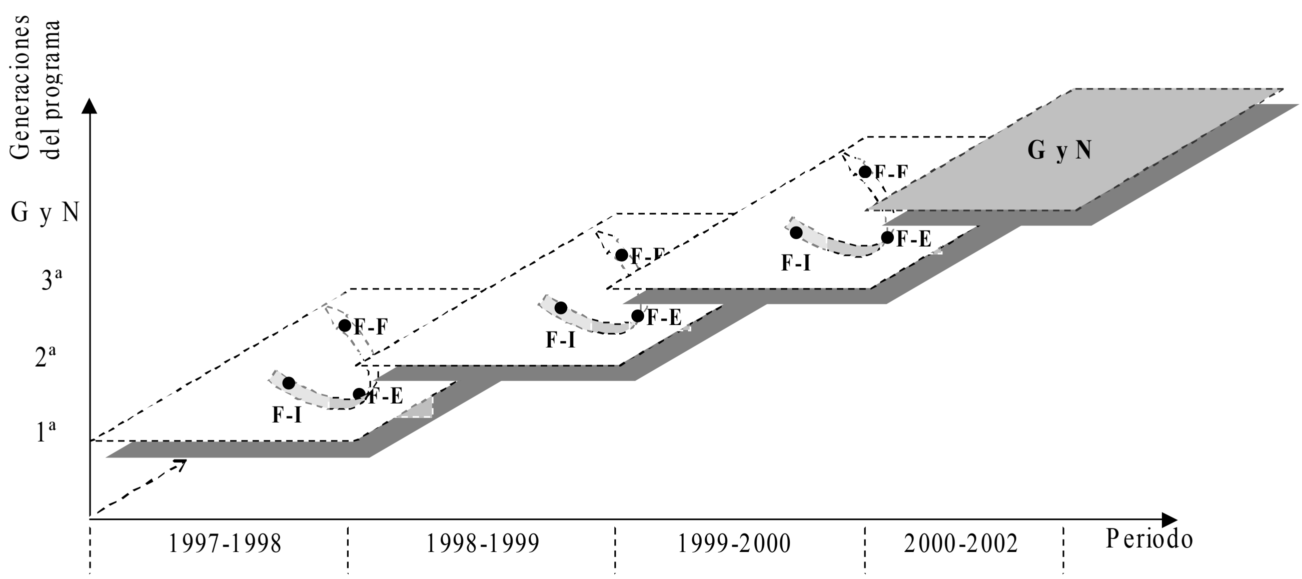
De todas maneras, el esquema de las fases se ha operativizado para la obtención de la información en cada una de las puestas en escena de las diferentes generaciones del programa. De este modo, para cada una de ellas, a nivel micro tanto en el desarrollo del programa como para la obtención de la información correspondiente, hemos considerado las tres fases: fase inicial (F-I), fase intermedia o de ejecución (F-E) con sus respectivas subfases (F-E1, F-E2) y fase final (F-F). Del mismo modo, pero a nivel macro cada una de las tres ediciones o generaciones del programa corresponde sucesivamente con las tres fases, tal como procedemos a describirlo en la siguiente sección.

3.6. TRES GENERACIONES DEL PROGRAMA

Tal y como lo hemos sugerido en el párrafo anterior, el desarrollo global de nuestro programa, desde la etapa inicial (fase inicial) de planteamiento del problema de investigación, hasta la etapa actual (fase final) de evaluación general, ha seguido el proceso trifásico, cuya estructura hemos esquematizado anteriormente. A cada una de estas experiencias de diseño y realización parcial del programa, con su respectivo curso-taller, la hemos denominado en su conjunto una edición o **generación del programa**.

Hasta la fecha hemos realizado tres generaciones integrales del programa. Las dos primeras, realizadas durante el curso académico 1997/1998, constituyen los ensayos piloto del programa a evaluar, de acuerdo con nuestro diseño y modelo de investigación. La tercera generación, realizada entre los cursos académicos 1998/1999 y 1999/2000, corresponde al diseño e implementación definitiva del programa y, por tanto, al estudio empírico de la investigación. En la Figura 3.5 que presentamos a continuación intentamos resumir y visualizar esquemáticamente la información sobre las diferentes generaciones y fases del programa, sus perspectivas de generalización y naturalización (en el Plan de Formación Inicial de Profesores de Enseñanza Secundaria de la Universidad de Granada) y la compleja estructura multifásica de nuestro proceso de investigación.

Figura 3.5.
Tres generaciones del programa. Las letras G y N corresponden, respectivamente, con las fases hipotéticas de generalización y naturalización, una vez validado empíricamente el programa.



3.6.1. Primera generación del programa

La primera edición o generación del Programa, realizada en el periodo académico 1997/1998, corresponde con el primer ensayo piloto de nuestro estudio. En el siguiente capítulo describiremos en una forma más detallada cada generación del programa. En este apartado nos limitaremos a presentar una breves sinopsis, fase por fase, de cada una de las tres generaciones y sus respectivas puestas en escena.

El primer ensayo piloto (segunda fase, F-E.1) se desarrolló entre los meses de marzo y abril de 1998. El curso-taller correspondiente, tuvo una duración de 30 horas presenciales y 10 no presenciales, durante las cuales los alumnos debían resolver pequeñas tareas y realizar lecturas complementarias; este seminario se desarrolló en 10 sesiones de a 3 horas por sesión y por día, durante 2 semanas consecutivas. La primera fase (F-I.1) de esta primera generación del programa se empezó a desarrollar a finales del año 1997. El equipo de investigadores estuvo conformado por los profesores del programa de doctorado, Dres. Luis Rico (Director de la tesis) e Isidoro Segovia, como observador experto, y el doctorando, como investigador principal. La muestra de alumnos participantes la conformaron 19 alumnos del último curso de la Carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Estos alumnos, en esos momentos se encontraban cursando, entre otros cursos de matemáticas, los cursos de Didáctica de la Matemática y de Prácticas Docentes, los cuales constituyen la puesta en práctica del Programa de Formación Inicial que ofrece el Departamento de Didáctica de la Matemática a los alumnos de esta carrera.

En síntesis, las correspodencias entre las distintas fases y generaciones del programa son las siguientes:

- **F-I.1:** Primera fase correspondiente a la primera generación del programa**:** Primera aproximación a la definición del problema de investigación, y, por lo tanto, a la primera generación del programa.
- **F-E.1: Primer ensayo piloto:** Diseño e implementación de la primera generación del programa; observación, obtención y organización de la información.
- **F-F.1:** (i) Transcripción de cintas de vídeo y audio. (ii) Análisis de los documentos, de las producciones de los alumnos y demás información recogida en este primer ensayo piloto. (iii) Primera evaluación parcial (respecto al tiempo) y general o global del Programa: Análisis y evaluación del primer ensayo piloto y toma de decisiones dirigidas a hacer los ajustes pertinentes para el diseño del segundo ensayo piloto.

3.6.2. Segunda generación del programa

La segunda edición del programa corresponde con el segundo ensayo piloto, el cual, igual que el primero, se llevó a cabo durante los periodos académicos 1997-1998/1998-1999. El equipo de investigadores estuvo conformado por los profesores del programa de doctorado, Dres. Luis Rico (Director de la tesis) y Encarnación Castro, como observadora experta, además, el doctorando en el papel de investigador principal. La muestra de alumnos participantes la conformaron 13 alumnos del último curso de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Granada.

- **F-I.2:** Primera fase, correspondiente a la segunda generación del programa**:** Segunda aproximación a la definición del problema de investigación; reajustes del programa (en su segunda edición o generación); diseño del segundo ensayo piloto, sobre la base de los resultados y conclusiones del primer ensayo.

- **F-E.2: Segundo ensayo piloto:** Implantación de la segunda generación del programa; observación, obtención y organización de la información; transcripción de cintas de vídeo y audio.

- **F-F.2:** (i) Análisis de documentos: de las transcripciones de las cintas de audio y vídeo; de otras producciones de los alumnos y demás información recogida en este segundo ensayo piloto. (ii) Segunda evaluación parcial y general del programa: Análisis y evaluación del segundo ensayo piloto y toma de decisiones dirigidas a hacer los ajustes pertinentes para el diseño y planificación del tercero y definitivo ensayo o estudio empírico.

La primera fase (F-I.2) de esta nueva generación del programa se entrelaza con la última fase de la primera generación, por cuanto, la reflexión, evaluación y conclusiones de esta se hacen con miras al diseño, planificación e implantación, e incluso evaluación de la siguiente generación del programa. La segunda fase (F-E.2), de ejecución de la segunda generación, corresponde con el segundo ensayo piloto. El curso-taller correspondiente, que constituye la concreción en el aula de esta segunda generación del programa, se realizó entre los meses de junio y julio de 1998. Tuvo una duración de 36 horas presenciales (10 no presenciales); y se desarrollaron durante 12 sesiones, una sesión de 3 horas por día, en un lapso de 4 semanas.

Un hecho importante a comentar por la relevancia que tuvo para el proyecto de investigación, sobre todo por la etapa de desarrollo en que nos encontrábamos en esos momentos, es que, a la altura de la segunda fase (de ejecución) y, especialmente, de la tercera o fase final (de análisis y evaluación) de la segunda generación del programa, se incorporó al equipo de investigadores el Dr. José Gutiérrez, del Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación de la misma Universidad de Granada, en calidad de Codirector de este Proyecto de tesis doctoral.

3.6.3. Tercera generación del programa

El curso-taller correspondiente a esta tercera generación del programa, se realizó entre los meses de marzo y abril de 1999; tuvo una duración de 30 horas presenciales (y 10 no presenciales), que se desarrollaron durante 10 sesiones de 3 horas cada una, durante 10 días no consecutivos, en un lapso de tiempo de 5 semanas, con una semana intermedia de vacaciones, correspondiente a la Semana Santa de ese año.

El grupo de participantes (sujetos del estudio empírico) estuvo conformado por 10 alumnos del último curso de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Granada. El equipo de investigadores estuvo conformado por: los Dres. Luis Rico y José Gutiérrez, como Directores de la tesis; y el doctorando, como investigador principal y profesor del curso-taller D. José Ortiz, alumno del programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática, participó en el curso en calidad de observador externo.

- **F-I.3:** fase inicial de la tercera generación del programa**:** Tercera evaluación parcial y general del programa; tercera y última versión de la definición del problema de investigación; reajustes del programa, del diseño y planificación de la tercera generación, con base en los resultados, conclusiones e indicadores de calidad de los dos ensayos pilotos anteriores.

- **F-E.3: Estudio empírico:** diseño e implantación (desarrollo del estudio empírico) de la tercera y definitiva generación del programa; observación, recogida y organización de la información correspondiente al estudio empírico; transcripción de cintas de vídeo y audio correspondiente a los ensayos piloto realizados anteriormente.

- **F-F.3:** (i) Selección de criterios, dimensiones e indicadores para el análisis de la información y demás documentos correspondientes al estudio empírico (implantación de la tercera generación del programa); (ii) Tercera y última evaluación parcial y general del programa: Análisis y evaluación del estudio empírico siguiendo criterios e indicadores de calidad y coherencia, definidos previamente. (iii) Formulación de una propuesta de estandarización y naturalización (es decir, implantación a un contexto natural) del Programa, validado o comprobado empíricamente. (iv) Redacción final del informe de investigación.

De nuevo, la primera fase (F-I.3) de esta tercera generación del programa a evaluar, se entrelaza con la última fase de las primera y segunda generación, por la misma razón que la última fase de la segunda generación del programa se entrelaza con la última fase de la primera generación. La segunda fase (F-E.3), de implantación de la tercera generación, corresponde con el estudio empírico del programa.

3.7. DIMENSIONES DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN

Dos de las características principales de la metodología de evaluación de programas educativos son las **dimensiones** de análisis y evaluación y los **sistemas de indicadores** apropiados para realizar este análisis y evaluación. Las dimensiones se refieren a las categorías o tipos de cuestiones y aspectos del programa que interesan analizar y evaluar; y los indicadores se refieren a los elementos o componentes principales o relevantes que caracterizan a estas dimensiones y en términos de los cuales se operativiza y concreta la realización de dicho análisis y evaluación.

Dado que, las dimensiones y sus respectivos sistemas de indicadores constituyen, a la vez, técnicas e instrumentos necesarios para analizar el cumplimiento de los objetivos y propósitos de la evaluación, deben satisfacer el siguiente par de condiciones: ser fiables y factibles, en el sentido que la información suministrada por ellos sea fiable y válida; y, la existencia de los documentos de soporte que permitan recabar dicha información esté garantizada (Forns y Gómez, 1995). Así que, de acuerdo con esto y en síntesis, las dimensiones y los respectivos sistemas de indicadores deben estar relacionados con los objetivos y propósitos (metas) del programa, con las cuestiones y tipologías de aspectos que interesan analizar y evaluar y con las correspondientes fuentes documentales y de información de soporte.

Para definir las dimensiones de análisis del programa situémonos en las dos preguntas genéricas más importantes para tal efecto: **¿Qué aspectos del programa nos interesan y decidimos evaluar?** y **¿por qué o para qué evaluamos?**

La primera de estas cuestiones, desde un punto de vista subjetivo, se refiere a la pregunta sobre ¿Qué aspectos de los alumnos (y demás participantes) nos interesa y decidimos evaluar? Y la segunda pregunta está relacionada con los efectos (metas) del programa y con los objetivos esperados. Las otras dos preguntas genéricas típicas son **¿cómo evaluamos?** y **¿cuándo evaluamos?** Pero, en nuestro caso, estas no nos sugieren otras dimensiones. Sin embargo, tienen cierta relevancia, ya que nos llevan a pensar en posibles indicadores adicionales, en términos de los cuales se va a centrar el análisis y la evaluación de otros aspectos complementarios, correspondientes a cada una de las dimensión ya definidas. Por ejemplo, la segunda cuestión, nos permite conectar con las diferentes fases y la temporalización del programa.

Para pensar en los aspectos relacionados con la primera pregunta sobre **¿qué cuestiones del programa son relevantes para evaluar?** O sea, en las dimensiones y sistemas de indicadores, consideramos los diferentes aspectos de acuerdo con su carácter **externo e interno**. Los primeros están encaminados a valorar en qué medida se han cubierto las expectativas de los agentes implicados, se han conseguido los objetivos iniciales, etc. Los principales interesados en estos aspectos suelen ser los diseñadores y planificadores del programa, que en nuestro caso, somos los investigadores. Y los segundos, son los relacionados con los aspectos formativos en los que incide el programa y, que en nuestro caso, corresponden con **las cuatro cuestiones principales de investigación**, referidas a la estructura conceptual (**EC**) (conceptos, procedimientos y actitudes), los sistemas de representación (**SR**), las calculadoras graficadoras (**CG**) y la formación didáctica (**FD**) de los alumnos para profesores participantes en el programa.

Otro criterio que hemos tenido en cuenta para establecer las dimensiones de análisis y evaluación del programa consistió en considerar las diferentes "tipologías generales de evaluación", propuestas en la literatura especializada sobre investigación evaluativa (Alvira, 1991, p. 35). Entre estas, consideramos pertinentes con nuestro programa, propósitos de evaluación y técnicas de recogida de la información, las siguientes tipologías:

- **Evaluación del diseño (coherencia conceptual con el marco teórico):** Evaluación sobre la base de los indicadores de tipo teórico, conceptual y curricular, y el recurso directo a expertos y observadores mediante triangulación. Análisis lógico del conjunto de actividades didácticas y de desarrollo del programa, con respecto a sus objetivos y metas. Análisis comparativo y valoración del estudio empírico, con respecto a los ensayos pilotos y al diseño y planificación.

- **Evaluación de necesidades:** Evaluación a través de encuestas a potenciales usuarios de los cursos-taller y a profesores del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemática del DDM de la UGR, con base en indicadores de tipo curricular y el recurso a expertos.

- **Evaluación de la implementación.** Análisis de cómo ha funcionado el programa, es decir, descripción del proceso y de las actividades que tienen lugar durante la intervención y desarrollo de cada generación del programa, haciendo un análisis del balance entre la planificación y la implementación.

- **Evaluación de los efectos y resultados del programa sobre los participantes.** A través de los desempeños, producciones y respuestas a las tres preguntas claves del plan de formación: **¿Qué he aprendido sobre calculadoras graficadoras, funciones, sistemas de representación, diseño de unidades didácticas y enseñanza?** Para esto, es necesario tener en cuenta los "logros" o grados de cumplimiento de los objetivos y metas, lógicamente esperados. Para ello observaremos y evaluaremos la autonomía, motivación y dispersión en relación con el desarrollo de las distintas tareas y actividades. En este caso, las variables independientes (causales) son las actividades que constituyen la realización empírica del programa. A partir de estos análisis intentaremos caracterizar distintas tipologías de estudiantes.

Las diferentes tipologías de análisis y evaluación del programa las podemos agrupar a su vez en dos grandes categorías: las que atienden a dimensiones **objetivas**, relativas a aspectos objetivos del programa tales como diseño, planificación, proceso, etc. (corresponden a los tres primeros ítems del apartado anterior); y las que atienden a dimensiones **subjetivas**, relativas a los efectos directos (causales) o indirectos del programa sobre los participantes y demás personas sobre los cuales el programa pueda tener alguna influencia (cuarto ítem).

3.7.1. Dimensiones objetivas

En principio, como estrategia práctica de toma de decisión, hemos considerado las siguientes dimensiones objetivas (**D-O**) para el análisis y evaluación de nuestro programa. Con el fin de irlas dotando de contenido, para cada una de ellas agregamos algunos descriptores y, en algunos casos, algunas subdimensiones. También, indicamos entre paréntesis, la o las fases en que, principalmente, estas constituyen dimensiones de análisis y evaluación del programa, o sea, la o las fases en que son puestas en acción.

D-O.1: Características estructurales del programa: Necesidades y facilidades; estructura planificada en relación con el contenido, la organización, la metodología, etc. (Fases iniciales F-I de las diferentes generaciones del programa).

D-O.2: Características logísticas del programa. Implantación o proceso de desarrollo del programa. (Fases de ejecución F-E).

3.7.2. Dimensiones subjetivas

Las dimensiones de análisis y evaluación subjetivas (D-S), así como los correspondientes sistemas de indicadores se refieren a los distintos elementos, estructurados sistémicamente, de nuestro modelo particular de los organizadores para el currículo. Este hecho, constituye a la vez, un indicador de evaluación de la coherencia teórica o conceptual del programa. En esta tipología subjetiva consideramos las siguientes dimensiones:

D-S.1: Relativa a la EC y los SR. Riqueza y complejidad conceptual y representacional, dominio procedimental; actitudes con respecto al contenido matemático. (Fases F-I, F-E y F-F).

D-S.2: Relativa a la CG. Actitudes hacia las calculadoras graficadoras como instrumento curricular o didáctico; dominio de las CG; dominio de las utilidades didácticas de las CG. (Fases F-I, F-E y F-F).

D.S.3: Relativa a la FD. Actitudes en relación con la enseñanza del contenido matemático propuesto. Conocimiento didáctico del contenido. Articulación de las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal del conocimiento matemático referido al contenido específico. Criterios y pautas de evaluación del contenido matemático. (Fases F-I, F-E y F-F).

3.8. SISTEMAS DE INDICADORES

Una vez definidas las dimensiones de análisis y evaluación, es preciso determinar los sistemas de indicadores relativos a cada una de ellas, en términos de los cuales se van a realizar estos análisis. Teniendo en cuenta las dimensiones definidas y la caracterización general de los indicadores que presentamos anteriormente, para el análisis y evaluación del programa consideraremos los sistemas de indicadores que describimos a continuación.

3.8.1. Sistemas de indicadores referentes a las dimensiones objetivas

- **Indicadores referentes a la primera dimensión objetiva D-O.1:** Con estos indicadores pretendemos analizar (en todos los casos) y evaluar (en algunos casos) diferentes aspectos y cuestiones objetivas –estructurales y logísticas- del programa, tales como, por ejemplo, necesidades, facilidades, contenido, metodología e implantación. La siguiente es la lista de indicadores correspondientes a esta categoría:
  - Adecuación a las necesidades sociales, institucionales y curriculares.
  - Atención a las demandas formativas de los futuros profesores de matemáticas, alumnos universitarios de la Licenciatura de Matemática.
  - Coherencia interna del programa con respecto al currículo y el marco teórico.

- **Indicadores referentes a la segunda dimensión objetiva D-O.2:** Con estos indicadores pretendemos analizar y evaluar otros aspectos logísticos, tales como los distintos aspectos del proceso de implantación o desarrollo del programa. Este sistema de indicadores se refieren a:
  - La adecuación temporal y ajuste del contenido matemático, en sus distintos campos (conceptual, procedimental y actitudinal), como del conocimiento y dominio de la tecnología.

Complementariamente y cuando lo consideremos relevante, evaluaremos otros aspectos relacionados con algunos otros elementos de la propuesta de los organizadores, tales como la modelización y relativos a errores y dificultades. Y por último, se realizará una evaluación global del programa. Un criterio para establecer indicadores útiles para la evaluación global del diseño y planificación del programa y de su puesta en escena sería la pregunta: ¿Es un programa empíricamente validado? La última generación de nuestro programa está basada en una puesta en marcha, reflexión y evaluación de generaciones anteriores. Este proceso metodológico, para el cual también se ha tenido en cuenta la estructura propuesta por Pozo (2000, p. 378), forma parte del diseño de nuestro plan de investigación evaluativa en la acción.

3.8.2. Sistemas de indicadores referentes a las dimensiones subjetivas

En la introducción del apartado 3.7 sobre la definición de las dimensiones de análisis del programa, planteamos que estas estaban necesariamente basadas en los objetivos específicos de la investigación y evaluación, y que para operativizar esta relación, consideramos como guión las tres preguntas claves siguientes: ¿Qué he aprendido sobre calculadoras graficadoras, sobre funciones cuadráticas y sistemas de representación, y qué he aprendido sobre el diseño de unidades didácticas y enseñanza de estos contenidos utilizando las modernas calculadoras graficadoras?

Por lo tanto, para determinar nuestros sistemas de indicadores referentes a cada una de las respectivas dimensiones de evaluación y análisis, consideramos implícitamente, como un indicador generativo y complementario a estas tres preguntas, los tres aspectos ya clásicos del conocimiento, a saber, conceptual, procedimental y actitudinal. También, consideramos previamente los objetivos de evaluación específicos, referidos a las transformaciones o modificaciones de estos aspectos cuando están enfocados en el conocimiento referido a los contenidos matemático en cuestión.

Más precisamente, la evaluación de las modificaciones se realizará en los casos en que contamos con datos iniciales y finales, como en el caso de las escalas de actitud y los mapas conceptuales. Y la evaluación de las modificaciones del conocimiento procedimental y actitudinal, en los casos en que contamos con información de procesos, como en los manejo y dominio de las CG y las actitudes relativas al conocimiento matemático. Las transformaciones y modificaciones (revisiones, enriquecimientos, construcciones, coordinaciones progresivas, etc., Coll, 1988, p. 42) se analizarán en términos de los esquemas de conocimiento, tal y como se conciben actualmente en la Psicología Cognitiva y del Aprendizaje (Coll, 1988, p. 36).

A continuación presentamos los distintos sistemas de indicadores referentes a las dimensiones subjetivas (D-S) definidas anteriormente en la Sección 3.7.2.

- **Indicadores referentes a la primera dimensión subjetiva D-S.1:** Con estos indicadores pretendemos analizar las modificaciones en los conocimientos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) y en general las concepciones de los alumnos para profesor participantes del programa, relacionados con la estructura conceptual y el contenido matemático que nos ocupa. La siguiente es la lista de indicadores correspondientes a esta categoría:
  - Modificaciones y cambios en los conocimientos y concepciones relativos a la estructura conceptual estudiada.
  - Modificaciones y cambios en los conocimientos y concepciones relativos al uso (tratamientos, interrelaciones y conversiones) de diferentes sistemas de representación.

- **Indicadores referentes a la segunda dimensión subjetiva D-S.2:** Con estos indicadores pretendemos analizar:
  - Las modificaciones y cambios observados en las concepciones y conocimientos (de carácter procedimental y actitudinal) relativos al dominio tecnológico o habilidades procedimentales en el manejo de la calculadora graficadora.

- **Indicadores referentes a la tercera dimensión subjetiva D-S.3:** Con estos indicadores pretendemos analizar:
  - Modificaciones y/o cambios en las concepciones y conocimientos relativos al conocimiento didáctico sobre el contenido.
  - Modificaciones y/o cambios en las concepciones y conocimientos relativos a las utilidades curriculares de contenido y recurso tecnológico.

° Modificaciones en las actitudes hacia la enseñanza del contenido matemático, utilizando calculadoras graficadoras.

3.9. TÉCNICAS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

> La evaluación de programas, antes que los problemas de causalidad de las teorías, se deberá centrar sobre los procesos de instrumentación de las estrategias de intervención ya que son las contingencias que se establecen cada caso las que, en última instancia, determinan las diferencias... La elección de una aproximación o enfoque específico no se limita a una simple distinción entre metodología cuantitativa y cualitativa ya que supondría una simplificación absurda de una realidad compleja que tiene muchos matices y requiere ser abordada de forma comprensiva... esto significa que clasificar los modelos evaluativos según este criterio carece de sentido (De Miguel, 2000, p. 294).

3.9.1. Técnicas e instrumentos de recogida de datos

Correspondiendo con cada una de las fases del programa y teniendo en cuenta las diferentes dimensiones de análisis y evaluación y sistemas de indicadores correspondientes, hemos identificado distintas fuentes de producción de la información o fuentes documentales que nos han servido de soporte para la recogida de la información. Así, durante cada una de las fases de intervención (de cada generación del programa), los alumnos tuvieron que presentar multitareas (tareas con varios ítems relativamente independientes), sobre la enseñanza de algunos de los tópicos que ellos consideraran más importante del contenido matemático específico que nos interesaba en este estudio.

Dos de las condiciones para estas tareas consistieron en que debían presentar una primera versión (tarea inicial), antes de o al comenzar el seminario-taller (F-I); luego, durante cada una de las subfases intermedias o de ejecución (F-E1 y F-E2), correspondientes a cada uno de los modelos de calculadoras graficadoras TI-83 y TI-92, respectivamente, debían presentar pequeñas tareas complementarias de la inicial, y al finalizar el curso-taller, debían presentar una tarea (tarea final) que, más que complementar, mejorara la inicial en concordancia con las diferentes cuestiones que ellos consideraran que les había aportado el curso-taller. La otra condición era que todas estas tareas y demás actividades realizadas durante el desarrollo del curso, debían estar pensadas o dirigidas hacia la elaboración de una hipotética unidad didáctica sobre el contenido matemático que nos ocupaba enfocado hacia la Enseñanza Secundaria (para alumnos de 14 y 15 años de edad).

Por otra parte, cada una de las diez a doce sesiones en que se estructuró el programa, en cada una de sus respectivas generaciones, fue grabada en cintas de vídeo y audio, y posteriormente transcritas y organizadas en función del tipo de información que los investigadores consideráramos más relevantes en relación con las cuestiones principales de investigación. Además, aparte de los investigadores, en cada curso-taller se contó con un observador que, de la misma manera que estos, registraba sus observaciones y opiniones personales en un diario de campo. Adicionalmente, los investigadores (un investigador principal y dos asociados) y el observador, los cuales conformamos el equipo de investigación, sostuvimos reuniones periódicas de planificación, reflexión, evaluación y ajuste de las actividades realizadas y por realizar; y, también, sostuvimos reuniones de entrevista con expertos en alguna o algunas de las áreas de conocimiento que convergen a nuestro tema de trabajo. Cada una de estas reuniones fueron grabadas en casetes de audio y posteriormente transcritas en sus partes más relevantes.

Todas estas tareas, junto con las intervenciones y producciones de los alumnos durante el desarrollo de las actividades programadas para cada una de las sesiones de cada curso-taller, así como durante los debates conjuntos realizados en cada sesión; las encuestas finales de opinión y valoración, los cuestionarios o escalas de actitud que les aplicamos a los estudiantes en cada una de las fases inicial y final de cada uno de los cursos-taller; los registros en cintas de audio y posterior transcripción de las sesiones de trabajo del equipo de investigadores y de las entrevistas con los expertos, constituyen las principales fuentes documentales de soporte de la información y obtención de datos relevantes para nuestro trabajo.

A continuación presentamos el grueso de los documentos que constituyen la más importante fuente a partir de los cuales hemos obtenido la información referente a los distintos indicadores.

1. Diseños previos de los cursos-taller basados en los materiales y resultados de las evaluaciones y reflexiones y en las aportaciones de los miembros del equipo director y asesor de la tesis durante las reuniones de diseño y planeación previas a este curso.

2. Programa y guión del curso-taller: Programación detallada del curso y guión para los participantes, desarrollado sesión por sesión.

3. Cintas de vídeo con las grabaciones de cada una de las sesiones del seminario.

4. Casetes de audio con las grabaciones de las discusiones e intervenciones más trascendentes de los participantes durante cada una de las sesiones.

5. Casetes de audio con las grabaciones de las entrevistas y aportaciones de expertos y de los miembros del equipo investigador y de los Directores de tesis, durante las reuniones de seguimiento y evaluación de las sesiones.

6. Cuadernos de trabajo de cada uno de los alumnos participantes del curso.

7. Tareas inicial, intermedia y final presentada por cada uno de los alumnos participantes del curso-taller (tercera generación del programa, y estudio empírico).

8. Resultados de las encuestas y la valoración del curso presentada por los participantes tanto al inicio como al final del mismo.

9. Cuaderno de campo del Profesor José Ortiz (observador externo) con las notas, comentarios y valoraciones realizadas durante el desarrollo del seminario.

10. Mapas conceptuales iniciales y finales presentados por los alumnos en cada uno de los curso-taller.

11. Definiciones de la función de segundo grado al inicio y al final del seminario.

En la siguiente Tabla 3.1. presentamos de forma esquemática y resumida las relaciones entre las cuestiones centrales de investigación, relacionadas con las tres preguntas claves, pero, en su forma más detallada o analítica, es decir, refiriéndonos a los dominios conceptual, procedimental, actitudinal y representacional de manera separada; los objetivos de evaluación del programa, las dimensiones de análisis del mismo, los respectivos sistemas de indicadores y las principales y respectivas fuentes documentales de soporte desglosadas.

Tabla 3.1.

Inventario y relación entre cuestiones centrales de investigación, objetivos de evaluación, dimensiones de análisis, sistemas de indicadores, fuentes documentales de soporte fases de recogida y tratamiento de la información

CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN		OBJETIVOS DE EVALUACIÓN	DIMENSIONES DE ANÁLISIS	SISTEMAS DE INDICADORES	TECNICAS E INSTRUMENTOS	FASES DE OBTENCIÓN
EC	**Dim. Conceptual**	O.2, O.3	D-S.1	- Modificaciones o cambios cognitivos	-Definiciones -Mapas conceptuales	F-I, F-E y F-F
	Dim. Procedimental	O.2, O.3	D-S.1	- Modificaciones o cambios	-Observación	F-E
	Dim. Actitudinal	O.2, O.3	D-S.1	- Cambios		F-I y F-F
SR	**Dim. Conceptual**	O.2, O.3	D-S.1		-Definiciones -Mapas conceptuales	F-I, F-E y F-F
	Dim. Procedimental	O.2, O.3	D-S.1		-Observación	F-E
	Dim. Actitudinal	O.2, O.3	D-S.1			
CG	**Dim. Conceptual**	O.2, O.3	D-S.2			
	Dim. Procedimental	O.2, O.3	D-S.2	- Modificaciones y cambios en dominio	-Actividades en tareas -Observación	F-I, F-E y F-F
	Dim. Actitudinal	O.2, O.3	D-S.2	- Cambio actitudinal	-Escalas de actitudes -Observación	F-E
FD	**Dim. Conceptual**	O.2, O.3, O.4	D-S.3			F-I, F-E y F-F
	Dim. Procedimental	O.2, O.3, O.4	D-S.3		-Actividades en tareas	F-I, F-E y F-F
	Dim. Actitudinal	O.2, O.3, O.4	D-S.3	- Cambio en actitudes de enseñanza	-Observación	F-I y F-F
EVALUAC. PROGRAMA		O.1, O.5 y O.6	D-O.1, D-O.2	-Coherencia - Validez	-Análisis de documentos - Consulta a expertos	F-I y F-E

3.9.2. Mapas y diagramas conceptuales

En el Capítulo II planteamos que "la moderna conceptualización de las matemáticas está basada en las nociones de estructura y de sistema" (Rico, 2000). Para expresar esta idea de la complejidad sistémica de los distintos elementos (ítems) –conceptuales, procedimentales, representacionales- y relaciones que organizan y caracterizan una estructura matemática determinada, utilizamos **mapas** o **diagramas conceptuales**, como una forma bidimensional de reflejar su comprensión o manera de concebirla y describirla sobre el papel o la pizarra. Los mapas y diagramas conceptuales los utilizamos en este estudio como instrumentos de recogida y análisis de información relacionada con el dominio conceptual y la capacidad de análisis que tiene un alumno o profesor sobre un determinado concepto o estructura conceptual.

Un **mapa conceptual** (**MC**), en la terminología de Novak y Gowin (1988) y Novak (1998) o un **diagrama conceptual** en nuestra terminología (a fin de generalizar esta idea a cualquier otro tipo similar de representación) es, como dicen Novak y Gowin "un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones". Un MC es un diagrama de representación bidimensional de la estructura relacional (o asociativa) de un sistema conceptual dado. Un MC incluye, por lo tanto, los principales términos o ítems conceptuales que lo componen (nociones y propiedades fundamentales, notaciones, etc.) y las relaciones entre estos componentes. Todo MC lo concebimos como de carácter proposicional. Una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica. Para Novak y Gowin (1988), "la elaboración de mapas conceptuales es una técnica destinada a poner de manifiesto conceptos y proposiciones".

Los mapas o diagramas conceptuales de los alumnos y profesores en formación pueden permitir inferir las concepciones que tienen en un determinado momento sobre la estructura asociativa, la organización jerárquica y, en cierta medida, funcional del conocimiento tratado (López Rupérez, 1991). Dependiendo de las ideas y concepciones y de los enfoques didácticos de los estudiantes para profesores de matemática, es decir, del modelo de organizadores del currículo que tengan estos alumnos, sus diagramas o mapas conceptuales pueden ser más o menos complejos, elaborados y presentar determinadas tipologías cualitativa y estructural. En nuestros estudios previos, la mayoría de las veces, al elaborar un diagrama conceptual, estos alumnos y profesores en formación han puesto el énfasis en la estructura lógica de la disciplina y han adoptado principios de jerarquización conceptual. Los mapas conceptuales tipo Novak & Gowin (1988) y Novak (1998), se caracterizan por presentar relaciones de inclusividad conceptual. Para estos autores, los mapas deben ser jerárquicos, es decir, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos, en la parte inferior.

En cierta manera, los mapas o diagramas conceptuales de los alumnos de nuestros estudios previos o piloto reflejan también un intento de definición comprehensiva de un determinado concepto o estructura. La introducción de diferentes **ítems** que estén estrecha o esencialmente relacionados con un concepto (como, p. ej., distintas denominaciones o representaciones) dentro de un mismo **nódulo** no sólo potencian la funcionalidad del mapa sino que confirman nuestra apreciación. Durante el desarrollo y evaluación del estudio empírico (implantación y evaluación del programa de formación) nos preguntamos por las concepciones de los alumnos acerca de la naturaleza epistemológica de las relaciones entre los diferentes conceptos o **ítems**, **nódulos** y **relaciones** incorporados al diagrama o mapa.

Desde nuestra perspectiva e intereses didácticos y curriculares, consideramos el concepto de **diagrama conceptual** en un sentido amplio (incluyendo las distintas nociones de mapas conceptuales en la literatura al uso) de tal manera que nos permita abarcar diferentes formas de representar conocimientos, significados y concepciones. Tenemos en cuenta no sólo los aspectos técnicos y los resultados sino también las intenciones y contextos. Bajo estas premisas, nuestros diagramas conceptuales podrán ser de tipo Novak, diagramas de árbol, de flujo, sinópticos, etc. y podrán representar no sólo significados de conceptos, sino también estructuras organizativas, jerárquicas y secuenciales (sugiriendo secuenciación de actividades). Los mapas conceptuales tal y como los conciben Novak y otros autores se basan en teorías psicológicas del aprendizaje y no, como en nuestro caso, en teorías didácticas y curriculares. En nuestro estudio nos interesa no sólo la estructura cognitiva interna de los alumnos que se podría reflejar en sus mapas o diagramas conceptuales, sino también sus concepciones y conocimientos de carácter didáctico sobre el contenido matemático.

3.9.3. Técnicas de análisis de datos

Debido a la complejidad del estudio y a la riqueza de información obtenida, debemos poner en marcha una diversidad de técnicas e instrumentos para el análisis de la información y los datos obtenidos, de tal manera que nos permitan describir, tipificar e interpretar los diferentes datos en relación con las dimensiones –objetivas y subjetivas- y sistemas de indicadores de análisis y evaluación del programa.

Las técnicas mediante las cuales recogeremos, organizaremos y analizaremos estos datos son de tipo cualitativo y cuantitativo. Sin embargo, teniendo en cuenta que en muchos casos, para un mismo tipo de datos nos interesa considerar su doble aspecto cualitativo y cuantitativo, no resulta práctico presentar de forma separada instrumentos y técnicas correspondientes a estos dos caracteres. Por ejemplo, las producciones e intervenciones de los sujetos a lo largo de cada curso-taller, registradas en cintas de vídeo y audio y posteriormente transcritas, las hemos venido analizando con criterios tanto cuantitativos como cualitativos. También, los mapas conceptuales y las definiciones iniciales y finales presentadas por los alumnos durante el estudio empírico, las hemos considerado y analizado desde esta doble perspectiva cuantitativa y cualitativa.

Para el análisis de los procesos de participación y demás producciones de los alumnos, consideramos sistemas de indicadores, criterios y categorías que nos permitan detectar las, modificaciones, dificultades y factores de resistencia a estas modificaciones, puestos de manifiesto en sus diferentes producciones e intervenciones durante el desarrollo de las actividades correspondientes a cada una de las sesiones del curso-taller. Para ello hemos estructurado cada una de las sesiones realizadas en EPISODIOS y MOMENTOS. A las transcripciones de estos episodios las hemos denominado PROTOCOLOS. Los **episodios, momentos** y **protocolos** constituyen pues, técnicas para estructurar la recogida de información. Un **episodio** es un suceso relevante desde el punto de vista de los objetivos, cuestiones e intereses del estudio sucedido durante las sesiones del curso-taller; y los **momentos** son las unidades de tiempo en que ocurren los distintos hechos de cada episodio.

Por otra parte, para el análisis de los datos de carácter cuantitativo (asignaciones numéricas de frecuencias, tamaño del efecto, etc.) así como de los aspectos cuantitativos de algunos otros datos, hemos considerado los siguientes estadísticos descriptivos inferenciales y de reducción de datos:

Tipos de técnicas de análisis de los datos cuantitativos

TIPOS DE ESTADÍSTICOS	TÉCNICAS EMPLEADAS
Descriptivos	Frecuencias, rangos, tamaño del efecto, correlaciones y coeficientes de fiabilidad
Inferenciales	Pruebas de contraste no paramétrico: Prueba del signo de Wilcoxon
De reducción y clasificación de datos	Análisis factorial, Análisis *cluster*; Análisis de Escalamiento Multidimensional

En el Capítulo V donde se analizará y evaluará el conocimiento didáctico sobre el modelo local de los organizadores y en el Capítulo VI donde se presentarán las tipologías de futuros profesores de matemáticas describiremos y utilizaremos de manera integrada estas técnicas e instrumentos de análisis de datos de carácter cuantitativo y cualitativo.

IV

EL PROGRAMA DE FORMACIÓN: DISEÑO Y EVALUACIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo corresponde con la descripción del diseño, planificación, implementación y evaluación objetiva (estructural y logística) del programa. Más precisamente, presentamos una descripción amplia del marco académico-institucional y los presupuestos didáctico-curriculares en los que se sustenta el programa de formación que hemos desarrollado. Se ofrece una panorámica general del contenido formativo de las tres generaciones, así como sobre el diseño, la estructura de las sesiones y los procedimientos de planificación seguidos. Incluimos además, el guión general de trabajo propuesto a los alumnos en las diferentes ediciones del curso-taller, así como una planificación exhaustiva que ejemplifica dos de las sesiones (primera y quinta) prototípicas desarrolladas en las fases de implementación. En ellas se incluyen y ejemplifican las diferentes tareas, objetivos, actividades y propuestas de evaluación llevadas a cabo. También presentamos los resultados del análisis y evaluación del proceso de implementación y las progresivas decisiones y propuestas de cambio y mejora para ediciones futuras del programa.

4.2. MARCO CURRICULAR E INSTITUCIONAL DEL PROGRAMA

En el apartado 2.8.3 presentamos una descripción general, tanto del Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias, como del Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas del Departamento de Didáctica de la Matemáticas de la Universidad de Granada. En términos generales, estos planes de estudio y formación, y las especificaciones sobre las asignaturas, sus fundamentos y presupuestos didácticos que presentamos en dicho apartado constituyen el marco curricular e institucional de nuestro programa. En este capítulo nos centramos en los fundamentos didácticos específicos que han orientado la fase de diseño y planificación del programa de formación.

4.2.1. Los organizadores del currículo y diseño del programa

Tal y como lo hemos explicado en el Capítulo II, para los diseños y desarrollos de las propuestas curriculares sobre cada tópico del CM, por parte de los alumnos y por parte nuestra como diseñadores y evaluadores, hemos seguido, para el análisis sobre la formación didáctica inicial de los futuros profesores de matemáticas, en general, la propuesta de los **organizadores para el currículo** (Rico, 1997*b*, 1998*a*) y en particular el **modelo local** que hemos diseñado. En las secciones 2.5.4. y 2.5.5. presentamos una descripción detallada de estas dos propuestas conceptuales y metodológicas, enfocados particularmente en el contexto, los contenidos, los recursos y los intereses relevantes de nuestro programa.

También, hemos tenido en cuenta el "marco práctico" en el que se basa el Plan de Formación Inicial, para el desarrollo de cada tema, es decir, para organizarlo desde el punto de vista de su desarrollo curricular y didáctico, y concretarlo en actividades para el aula. La estructura curricular de este marco práctico (tomado de Rico, 1992*a*) es la siguiente:

1. **Objetivos**, relacionados con:
   1.1. Dominio conceptual
   1.2. Procesos

1.3.Aplicaciones

1.4.Actitudes

2. **Contenidos:** selección razonada para cada tópico y organización en términos de:
   2.1.Organización
   2.2.Temporalización.
   2.3.Preconceptos y errores previsibles.
   2.4.Niveles convenientes recomendados de dominio.

3. **Metodologías previstas**, en relación con:
   3.1.Situaciones.
   3.2.Modo de trabajo.
   3.3.Secuencia.
   3.4.Materiales y recursos

4. **Evaluación**, respecto a:
   4.1.Diagnóstico y corrección de errores.
   4.2.Cuestiones relevantes a controlar.
   4.3.Métodos en la valoración.
   4.4.Datos y registros.

5. **Bibliografía**
   5.1.Del profesor para preparar el tema.
   5.2.Del aula.

4.3. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO DEL PROGRAMA

El análisis didáctico preliminar de la estructura conceptual (**EC**) relativa a los tópicos del contenido matemático (**CM**) específico del programa está enmarcado por las perspectivas teóricas y prácticas que hemos presentado en las secciones 2.5.4, 2.5.5 y 4.3.1; o sea que, se basa en la propuesta general y el modelo local de los organizadores y en el "marco práctico" del Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática que acabamos de describir. Este análisis preliminar a la implantación del programa constituye, pues, una concreción a los presupuestos ya presentados en dicho capítulo.

En general, el contenido matemático (**CM**) del programa consiste en los siguientes temas: **la función de segundo grado**, **el trinomio de segundo grado** y **la ecuación cuadrática**. De acuerdo con la opción triádica que hemos elegido para el diseño del modelo local de los organizadores (véase sección 2.3.2), este contenido matemático lo concebimos a efectos del análisis didáctico, desde la perspectiva de los siguientes elementos organizadores para el currículo de matemáticas: OC.2, OC.3, OC.6 y uno inicial complementario OC.1, que describimos a continuación:

– **OC.1**: **Ubicación y propuesta de tratamiento disciplinar y cognitivo del contenido matemático (CM) en el Diseño Curricular Base**. En nuestro caso, nos hemos tomado como referencias el al Diseño Curricular Base (DCB) y la Ley Orgánica General para el Sistema Educativo (LOGSE) propuestas por el Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC) para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Los conocimientos relativos al contenido matemático que nos ocupa aparecen en el apartado A del Bloque 4 bajo el título de: "Interpretación, representación y tratamiento de la información".

– **OC.2**: **Estructura conceptual** (**EC**) **del contenido matemático** (**CM**) específico sobre el cual trabajamos, esto es, el sistema de cuestiones sobre las diferentes dimensiones cognitivas –conceptos, procedimientos y actitudes- del contenido matemático escolar referido a funciones en general y **función cuadrática**, **trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática** en particular.

– **O.3. La diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual-procedimental**. En nuestro caso, corresponde con los sistemas de representación (SR) convencionales y usuales en las matemáticas escolares para el estudio de las funciones, esto es, los sistemas de representación numérico (SRN), gráfico (SRG), simbólico (algebraico) (SRA) y el lenguaje natural técnico de las matemáticas.

– **O.6. La diversidad de materiales, tecnologías y demás recursos de tipo manipulativo que se puedan emplear para la enseñanza y aprendizaje de cada tópico**. En nuestro trabajo, básicamente consisten en las calculadoras graficadoras (CG) modelos TI-83 y TI-92 de la *Texas Instruments*. En este estudio concebimos estas calculadoras, por una parte, como nuevas tecnologías electrónicas e informáticas de representación múltiple, con posibilidades interactivas y dinámicas, y con sistema de cálculo simbólico (SCS) integrado; y por otra, como un elemento o campo conceptual y metodológico objetivo organizador para el currículo de matemáticas.

4.4. DISEÑO Y ESTRUCTURA DEL PROGRAMA PILOTO

El diseño del programa ha tenido diferentes fases y generaciones o ediciones. Una fase inicial, correspondiente al planteamiento inicial del problema de investigación. Sobre esta base tomamos la decisión de desarrollar un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, sobre la enseñanza de la función, el trinomio y la ecuación cuadrática, basada en la pluralidad de sistemas de representación y el uso de CG. En esta fase se realizó una primera generación y edición del programa, que se concretó en el diseño, implementación y realización de un (primer) curso-taller que desarrollamos, seguida de una segunda y tercera generación mejoradas.

4.4.1. Primera generación del programa

La planificación correspondiente a esta primera generación del programa, que en la estructura del diseño de la investigación corresponde a su vez con el primer ensayo piloto, queda reflejada esquemáticamente mediante la Figura 4.1.

Figura 4.1.
Estructura de la primera generación del programa (primer ensayo piloto 1998-1999)

Sesiones/Días		Horas	Temas de trabajo
I	Lu.-23-mar.	3hs.	Presentación de la CG TI-82: Principales características tecnológicas. Utilidades didácticas numéricas y algebraicas.
II	Ma.-24-mar.	2hs.	Utilidades didácticas gráficas y analíticas de la TI-82.
III	Mi.-25- mar.	3hs.	Resolución de problemas (ecuacion e inecuación) utilizando la TI-82.

IV	Ju.-26-mar.	2hs.	Introducción de conceptos y problemas matemáticos utilizando la CG TI-82.
V	Lu.-30-mar.	3hs.	Estudio de una función con la CG TI-82.
VI	Ma.-31-mar.	2hs.	Presentación de TI-92: Características tecnológicas. Utilidades didácticas. Visualización y exploración de conocimientos matemáticos con la TI-92.
VII	Mi.-1-abr.	3hs.	Estudio de funciones utilizando la TI-92.
VIII	Ju.-2-abr.	2hs.	Criterios curriculares basados en la utilización de CG: Usar la CG para visualizar conceptos y procedimientos matemáticos.
IX	Lu.-13-abr.	3hs.	Criterios curriculares basados en la utilización de CG (continuación): Usar la CG para realizar exploraciones numéricas y gráficas y después "confirmar" los resultados usando procedimientos analíticos.
X	Ma.-14- abr.	2hs.	Criterios curriculares basados en la utilización de CG (continuación): Usar la CG para trabajar numérica y/o gráficamente problemas imposibles o poco prácticos de resolver mediante métodos algebraicos o analíticos.
XI	Mi.-15-abr	3hs.	Criterios curriculares basados en la utilización de CG (continuación): Usar modelos visuales, simular problemas y formular conjeturas.
XII	Ju.-16-abr	2hs	Presentación y debate sobre los trabajos propuestos. Valoración conjunta del curso.

4.4.2. Segunda generación del programa

El diseño y planificación general de la programación correspondiente a la segunda generación y edición del programa, se basó en el análisis, evaluación y toma de decisiones para la mejora de esta nueva generación, por parte de los integrantes del equipo investigador, así como por parte de los alumnos para profesor y expertos (observadores y asesores) que participaron directa e indirectamente en la realización de la primera generación y edición del programa.

Algunas de las principales cuestiones que tuvimos muy en cuenta fueron los desempeños y evaluaciones de los alumnos, los materiales y recursos tecnológicos, bibliográficos y humanos, y todas las situaciones y problemas relacionados con el factor tiempo. De acuerdo con esto, sustituimos la calculadora TI-82 por un modelo más reciente (la TI-83) y que no nos presentara problemas de disponibilidad; modificamos el tiempo dedicado a cada una de las calculadoras, asignándole un poco más de tiempo a la TI-92; revisamos y ajustamos los problemas, actividades y tareas utilizadas en la primera generación; revisamos y perfeccionamos los instrumentos y estrategias de observación, registro y evaluación de la información; y, sin duda, adquirimos mayor experiencia y aprendizajes sobre la realización de programas y el desarrollo del tipo de curso-taller que nos interesaba llevar a cabo.

La planificación correspondiente a esta segunda generación del programa, que en la estructura del diseño de investigación corresponde a su vez con el segundo ensayo piloto, queda reflejada esquemáticamente en la siguiente Figura 4.2.

Figura 4.2.
Planificación de la segunda generación del programa (segundo ensayo piloto 1998-1999).

Sesiones por día		**Horas**	**Temas y actividades**
I	Lu., 29 de jun.	3hs.	- Presentación del curso. - Sistemas de representación (**SR**) y modelización como organizadores del currículo de matemáticas. - Características tecnológicas de la CG TI-83 - Utilidades curriculares y didácticas: numéricas, gráficas y simbólicas (algebraicas o analíticas) de las TI-83.
II	Ma., 30 de jun.	3hs.	- Configuración inicial de la CG TI-83 - Estudio de funciones mediante un enfoque basado en la pluralidad e interrelación de los SR y las utilidades de TI-83.
III	Mi., 1 de jul.	3hs.	- Resolución de problemas utilizando las CG (TI-83). - Introducción al estudio del trinomio de segundo grado y las funciones cuadráticas basado en los SR y las utilidades curriculares de las CG (TI-83).
IV	Ju., 2 de jul.	3hs.	- Introducción de conceptos matemáticos con un enfoque basado en los SR y las utilidades curriculares de las CG. - Evaluación de las utilidades de la TI-83 para la enseñanza de las funciones (de 2º grado) en secundaria
V	Vi., 3 de jul.	3hs.	- Nuevos organizadores curriculares, nuevas metodologías de enseñanza de las matemáticas: Principales características tecnológicas de la calculadora graficadora TI-92. - Utilidades curriculares y didácticas: numérica, gráfica, geométrica y simbólica (algebraica o analítica) de la TI-92. - Introducción al calculo algebraico y analítico utilizando el "sistema de cálculo simbólico" de la TI-92.
VI	Lu., 6 de jul.	3hs.	- Estudio general de funciones utilizando la TI-92. - Los sistemas de coordenadas en la TI-92. - Gráficas en 2 y 3 dimensiones.
VII	Ma., 7 de jul.	3hs.	- Visualización y exploración de conocimientos matemáticos utilizando la CG TI-92. - Continuación del estudio del trinomio de segundo grado y las funciones cuadráticas mediante un enfoque basado en los SR (NGA) y las utilidades didácticas de la TI-92.
VIII	Mi., 8 de jul.	3hs.	- Usar la CG para realizar exploraciones numéricas y gráficas y después "'confirmar" los resultados usando métodos algebraicos o analíticos. - Estudio local de funciones mediante la TI-92.

IX	Ju., 9 de jul.	3hs.	- Usar la CG TI-92 para trabajar numérica y gráficamente problemas difíciles de resolver mediante métodos algebraicos o analíticos convencionales. - Interrelacionar diferentes bloques de contenido gracias a las utilidades didácticas de la TI-92 - Usar modelos visuales, simular problemas y formular conjeturas con el apoyo didáctico de la TI-92.
X	Vi., 10 de jul.	3hs.	- Debate sobre los trabajos presentados. - Valoración conjunta del curso.

4.5. DISEÑO Y ESTRUCTURA DEL PROGRAMA PARA EL ESTUDIO EMPÍRICO

A partir de los sucesivos análisis, evaluación y mejoras del programa, definimos y concretamos una tercera y definitiva generación que consistió en la toma de decisiones concertadas y consensuadas (triangulación de investigadores) para una nueva, mejor y definitiva planificación y ejecución del programa. Esta tercera edición del programa y de su respectivo curso-taller, se corresponden a su vez con el estudio empírico de la investigación. La planificación general de esta tercera generación del programa está dada más adelante en las páginas 161 y 162 cuando se presenta la información sobre la programación general de las distintas sesiones del curso-taller para a esta generación del programa.

4.5.1. Diseño y planificación general del tercer curso–taller

Cada generación del programa se ha concretado en la práctica en el diseño y programación de un curso que se ha impartido mediante la modalidad de taller y que hemos denominado como “**Curso-taller: Calculadoras Graficadoras y Enseñanza de Funciones en el Currículo de Secundaria”**. La programación general de las distintas ediciones de estos cursos están dadas en las Figuras 4.1., 4.2. y en las páginas 161 y 162 de esta memoria, respectivamente. Cada curso-taller se ha estructurado en sesiones (una por día) de la siguiente forma: 12 sesiones para la primera edición y 10 para la segunda y tercera. La planificación, e información general de cada curso se ha presentado a través de un guión con la programación curricular detallada de cada sesión. Los guiones correspondientes a las dos primeras ediciones se pueden encontrar en los anexos. En esta sección nos limitaremos a presentar los 10 guiones correspondientes a las respectivas sesiones de la tercera generación del programa o estudio empírico.

A continuación presentamos copias-facsímiles del cuadernillo con la información y programación que suministramos a los alumnos participantes del estudio empírico al iniciar el curso-taller correspondiente. Contiene la estructura de la planificación y programación general del curso, así como los fundamentos y criterios curriculares, de carácter conceptual y práctico, en los que están basados el programa, el curso-taller y la investigación. Esto es, la confluencia de los campos de estudio que hemos denominado como las cuatro cuestiones centrales del estudio – **EC, SR, CG, FI-FD** -, estructurados desde las perspectivas conceptual y metodológica de la propuesta de **los organizadores para el currículo de matemáticas** de Educación Secundaria.

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso:

CALCULADORAS GRAFICADORAS Y ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

* * * * *

Profesorado:	Luis Rico y José Gutiérrez (Dirs.)
	Evelio Bedoya y José Ortiz
Ofrecido a:	Estudiantes de 5º Curso de la Licenciatura de Matemática
Titulación:	Certificado de Asistencia
Fecha:	Del 22 de marzo al 13 de abril de 1999
Horario:	1ª semana, 10:00 a 13:30 - 2ª semana, 16:30 a 20:00.
Duración:	40 horas (30 presenciales)
Aulas:	Seminario Didáctica de la Matemática,
	Facultad de Ciencias de la Educación

Número máximo de alumnos/as: 20

Información: Este curso forma parte de una investigación sobre Formación y Conocimiento Didáctico de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria. Los asistentes aceptan que la información obtenida durante su desarrollo será utilizada para elaborar los informes correspondientes, en los que se garantiza un tratamiento ético de los datos y el anonimato de los participantes.

4ª-La FI-CDP: Formación inicial y conocimiento didáctico profesional de los profesores de Matemática de Enseñanza Secundaria.

III.2. CRITERIOS Y PERSPECTIVAS PARA LA SELECCIÓN Y EL DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICA

El punto de partida inicial y genérico es el de las cuatro dimensiones o cuestiones vertebrales del programa y del proyecto, considerada desde la perspectiva o en el marco general de la propuesta de los organizadores y particular del modelo triádico de los organizadores para el currículo de matemáticas. Así, desde este marco general y desde las perspectivas o criterios que señalaremos a continuación, seleccionaremos y diseñaremos las diferentes actividades a desarrollar en cada una de las sesiones del curso-taller. En la medida de sus posibilidades, los alumnos podrían tenerlas en cuenta también para organizar sus reflexiones, intervenciones y producciones durante el desarrollo del curso-taller.

1ª. Criterios asociados con el conocimiento de las posibilidades tecnológicas (potencia, capacidad, rapidez, disponibilidad, etc) de las modernas CG en relación con el CM considerado.

2ª. Criterios relacionados con el conocimiento y dominio de las utilidades didácticas y curriculares de las CG. P.ej., el problema de las gráficas completas, configuración de las variables de las ventanas de visualización, etc.

3ª. Perspectivas "fenomenológicas", de modelización, simulación, resolución de problemas y aplicaciones prácticas y concretas.

4ª. Criterios relacionados con el estudio global y local de las funciones.

5ª. Criterios relacionados con un tratamiento o enfoque didáctico basado en la resolución de problemas (RP) y los SR (enfoque NGA), con énfasis en la introducción gráfica y numérica de los conceptos y procedimientos que nos ocupan.

6ª. Criterios relacionados con la innovación curricular y didáctica de las matemáticas basada en el uso de las nuevas tecnologías informáticas (NTI) de representación y cálculo simbólico, como las modernas CG TI-83 y TI-92.

7ª Criterios referidos a los cuatro planos o niveles del conocimiento, a saber: subjetivo, intersubjetivo, objetivo no autónomo y objetivo autónomo.

8ª. Criterios basados en la concepción de un modelo de los organizadores para el currículo de matemáticas de Enseñanza Secundaria, basado en los siguientes campos o líneas de estudio de la DM: Funciones, SR y CG; así como en las perspectivas de las líneas PNA, FI y CD.

IV. METODOLOGÍA

El curso constituye una oportunidad para realizar una reflexión conjunta y constructiva sobre el contenido, la metodología, los recursos y materiales didácticos y los criterios de evaluación propuestos para el estudio de las funciones en Secundaria. Tendrá una estructura de taller y los alumnos deben participar individual y colectivamente en las discusiones y demás actividades planteadas durante su desarrollo.

iii

Es necesario, entonces, tener un cuaderno o libreta de trabajo para ir tomando nota de las cuestiones que considere más relevantes (preguntas, conclusiones, dudas, etc.) que le suscite el curso a partir de las conferencias, discusiones y reflexiones.

Deben presentar por escrito una propuesta de unidad didáctica (UD) en tres fases (que desarrollarán como actividad no presencial) y expondrán y someterán a debate ante sus compañeros y profesores responsables del curso.

Una de las principales intenciones metodológicas del curso consiste en propiciar y fomentar el trabajo práctico, colaborativo y autónomo de los alumnos. Para llamar la atención sobre ello insertaremos en los documentos del curso la siguiente figura "🖩 👥 ✍", que nos recordará que durante la actividad correspondiente debemos realizar las siguientes actividades: (a) Exploraciones con la CG; (b) Reflexionar individual y colectivamente sobre estas exploraciones; y (c) Tomar nota de las conclusiones y dudas, como de todo aquello que consideremos relevante.

De acuerdo con esto, cada una de las sesiones tendrá la siguiente estructura:

i) Entrega de la documentación y materiales correspondiente a la sesión.

ii) Presentación de la actividad, incluyendo breve resumen sobre las opciones canónicas o convencionales de resolución.

iii) Selección y descripción de las utilidades específicas de la CG con respecto al contenido –conceptual, procedimental y representacional- de la actividad didáctica a realizar.

iv) Trabajo individual y en grupos pequeños (dependiendo de la actividad) para resolver las actividades didácticas. La actividad didáctica podrá incluir otra actividad asociada de ampliación o evaluación.

v) Presentación y reflexión conjunta por parte de los alumnos de sus propuestas de enseñanza y evaluación de los temas tratados.

vi) Reflexión abierta y debate compartido (socialización o puesta en común) por parte de todos los asistentes. Esta reflexión se hará en torno a **tres preguntas claves**, a saber:

1ª. ¿Qué he aprendido sobre funciones en general y sobre funciones y trinomio de segundo grado y ecuaciones cuadráticas?

2ª. ¿Qué he aprendido sobre calculadoras gráficas?

3ª. ¿Qué he aprendido como profesor de matemáticas sobre la enseñanza de estos contenidos, concebidos desde una triple perspectiva conceptual, procedimental y representacional?

V. EVALUACIÓN

El curso-taller será objeto de evaluación. Las actividades realizadas en clase y los trabajos escritos servirán para valorar el aprendizaje alcanzado.

Dada la estructura y organización del curso se considera obligatoria la asistencia a todas las sesiones para su valoración positiva. La asistencia al curso así como la realización y presentación en clase de los trabajos encomendados son los criterios considerados para su evaluación positiva.

iv

VI. ENCUESTAS Y TAREAS INICIAL, INTERMEDIAS Y FINAL

VI.1. ENCUESTAS

Antes de comenzar y al finalizar el curso los asistentes deben contestar un par de encuestas de actitud y evaluación del mismo.

VI.2. TAREA INICIAL

Objetivo y contenido matemático: Revisar los conceptos de función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática desde una perspectiva curricular y didáctica a nivel del 2º Ciclo de ESO (14/16 años)

Actividades a realizar:

1ª. Enunciar las principales **nociones** (conceptos), **procedimientos** y **propiedades** relacionadas con el contenido matemático propuesto.

2ª. Realizar un mapa conceptual que resuma los aspectos principales o más relevantes sobre este contenido matemático.

3ª. Seleccionar (o diseñar) una actividad para introducir estos temas.

4ª. Seleccionar la noción y el procedimiento que considere más difícil de enseñar o de aprender sobre estos temas, indicando algún(os) motivo(s) de la dificultad.

5ª. Redactar una prueba de evaluación sobre estos temas con 5 ítems.

Extensión máxima: 5 folios DIN A4.

VI.3. TAREAS INTERMEDIAS

Durante el desarrollo del curso se propondrán tareas complementarias a la inicial, que deberán ser realizadas dentro y fuera de la clase.

VI.4. TAREA FINAL

Al finalizar el curso y en base a la experiencia adquirida los participantes deben realizar una revisión y concreción de la tarea inicial. Concretamente, la tarea final consiste en diseñar y elaborar materiales para ser usados en una unidad didáctica en torno al contenido (conceptual y procedimental) referido a los conceptos de función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática, en el ámbito de 2º Ciclo de ESO (14/16 años), basándose en la pluralidad y articulación de los distintos sistemas de representación y en las utilidades curriculares y didácticas de las CG TI-83 y TI-92.

Objetivo: Teniendo en cuenta el contenido desarrollado en el curso basado en la pluralidad y articulación de diferentes sistemas de representación y las utilidades didácticas de las CG, complementar y/o profundizar la revisión de los conceptos de función, trinomio y ecuación de segundo grado realizada en la tarea inicial.

v

Actividades a realizar:

1ª. Revisión de la tarea inicial (reelaboración del mapa conceptual).
2ª. Formular una secuencia concreta de presentación y motivación de uno o más tópicos seleccionados.
3ª. Presentar una apartado o secuencia de desarrollo del tema elegido.
4ª. Diseñar o seleccionar una actividad para detectar y corregir dificultades y errores.
5ª. Proponer una secuencia de actividades de apoyo, ampliación o generalización.
6º. Redactar una prueba de evaluación con 5 ítems sobre los temas seleccionados.

Recomendaciones generales:

- Tener en cuenta que se trata de profundizar o detallar algunos puntos concretos del trabajo realizado en la tarea inicial, más que incrementar su extensión.
- Las actividades propuestas no sólo deben estar dirigidas a dotar de significado el contenido sobre el cual se quiere trabajar sino que, especialmente, deben estar relacionadas de algún modo con alguna(s) dificultad(es) de enseñanza/aprendizaje.
- Tener en cuenta y procurar fomentar el trabajo cooperativo durante el desarrollo de la actividad.
- Para el diseño de la actividad se deben tener especialmente en cuenta, aspectos o cuestiones relacionadas con las pluralidad y articulación de distintos tipos de representación y las utilidades didácticas de las calculadoras gráficas TI-83 y TI-92.
- También, podrían tenerse en cuenta para cuestiones relacionadas con la resolución de problemas, la modelización y la fenomenología.

Extensión máxima: 10 folios DIN A4.

Fecha límite de entrega: Lunes 19 de abril de 1999.

VII. PLANIFICACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE LAS SESIONES

El curso se desarrollará en 10 sesiones (una por día) de 3 horas cada una, con un descanso o intermedio de 20 minutos y de acuerdo con la siguiente planificación o programación general (véase página siguiente).

Nota: Durante el desarrollo del curso, al comienzo de cada sesión se entregará la programación y guión específicos y de forma más detallada correspondiente a dicha sesión.

SESIÓN	TEMAS Y ACTIVIDADES
I 22-3-99 Lunes	- Presentación general del curso y tarea inicial. - La CG TI-83: toma de contacto, características tecnológicas. - Utilidades curriculares y didácticas de la TI-83. - Aproximaciones y grado de precisión (número de dígitos) - Geometría del "plano TI-83" - Introducción a la resolución de problemas - Modelo organizador del currículo de matemáticas: los SR , las NTI como medios de representación, visualización y modelización y la FI y el CD como organizadores del currículo. - Reflexión conjunta y evaluación de la primera sesión.
II 23-3-99 Martes	- Otras utilidades curriculares de la TI-83: "Funciones avanzadas" - CG-TI-83: Pantalla dividida y articulación de sistemas de representación. - Introducción numérica y gráfica de la función de segundo grado. - Iniciación del estudio global de funciones. La noción de "gráfica completa" - Estudio de familia de funciones: Diseños y patrones de gráficas lineales y cuadráticas. - El *a*, *b*, *c* de las funciones cuadráticas. - Transformaciones geométricas de gráficas de funciones. Ecuaciones paramétricas de funciones y relaciones.
III 24-3-99 Miércoles	- CG y solución de ecuaciones e inecuaciones. - Método de iteraciones y aproximaciones sucesivas. - Introducción a las matrices con la TI-83. - CG y resolución de problemas basada en la visualización, modelización y articulación de diferentes sistemas de representación. - Introducción gráfica al estudio del trinomio de segundo grado y la ecuación cuadrática basado en las utilidades didácticas de la TI-83.
IV 25-3-99 Jueves	- Introducción exploratoria e intuitiva de nuevos conceptos matemáticos gracias a las utilidades de las NTI. - Tratamiento de problemas matemáticos difíciles mediante procedimientos intuitivos basados en la articulación de diferentes SR con apoyo de la CG. - Estudio global y local de funciones: Las "funciones racionales cuadráticas"
V 26-3-99 Viernes	- Evaluación de las utilidades curriculares de la TI-83. - Debate sobre los trabajos presentados. Evaluación conjunta del curso. - Presentación de la TI-92: Primera toma de contacto. - Relación TI-83 $\subset$ TI-92. - Configuración inicial y gestión de memoria y variables. - La TI-92 concebida como organizador para el currículo de matemáticas. - Descripción de las principales utilidades curriculares y didácticas de la TI-92: Sistemas de coordenadas y de representación de funciones. - División de pantalla y articulación de diferentes SR. - Introducción al estudio general (NGA) de funciones con la TI-92. - Definición de funciones y familia de funciones. - Inicio del estudio de funciones racionales cuadráticas. - Gráficas en 2 y 3 dimensiones: Visualización (en 3D) de ceros complejos de trinomios de segundo grado.

vii

VI 6-4-99 Martes	- Calculo exacto y aproximado con la TI-92. - Introducción al calculo simbólico con la TI-92: factorización del trinomio de segundo grado. - Solución de la ecuación cuadrática. - Continuación del estudio de funciones racionales cuadráticas con la CG. - Estudio global de funciones. Estudio de familias de funciones. - Cálculo y composición de funciones usando la TI-92. - Estudio local de una función mediante la TI-92. - Transformaciones geométricas de gráficas de funciones. Funciones en coordenadas paramétricas (y polares).
VII 7-4-99 Miércoles	- Solución de ecuaciones e inecuaciones usando la TI-92. - Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Introducción a las matrices. - Resolución de Problemas: L CG para realizar exploraciones numéricas y gráficas y después "confirmar" los resultados usando métodos analíticos. - Usar la CG TI-92 para trabajar numérica o gráficamente problemas difíciles de resolver mediante métodos algebraicos o analíticos. - Aplicaciones y simulaciones de situaciones problemas que dan origen a relaciones NGA articuladas y visualizadas mediante la TI-92.
VIII 9-4-99 Viernes	- Otra Aplicaciones y Editores de la TI-92 - Introducción al Data/Matrix Editor. - Geometría interactiva, la geometría de la TI-92: El Cabri. - Más sobre resolución de problemas: Interrelacionar diferentes bloques de contenido (Algebra, Geometría y Análisis) gracias a las utilidades didácticas (Aplicaciones) de la TI-92.
IX 12-4-99 Lunes	- Programación (BASIC) con las calculadoras TI-83 y TI-92: Programa generador aleatorio de parábolas. - Usar modelos visuales, simular problemas y formular conjeturas con el apoyo didáctico de la TI-92.
X 13-4-99 Martes	- Revisión de temas y cuestiones pendientes y ampliación de temas sobre las utilidades curriculares y didácticas de la TI-92. - Reflexión y evaluación sobre las utilidades didácticas de la TI-92 para la enseñanza de las funciones, el trinomio y la ecuación de 2º grado en Secundaria. - Debate sobre los trabajos realizados. Reflexión y valoración conjunta del curso (orientada por las tres preguntas claves). - Recogida de datos.

VIII. REFERENCIAS

VIII.1. Direcciones URL en Internet

ICTCM (International Conference Teaching Mathematics with Technology):
Electronic Proceedings: http://archives.math.utk.edu/ICTCM/keywords.html
Texas Instruments Resources: http://www.ti.com/calc/
Texas Instruments - España: http://www.ti.com/calc/spain/spain.htm (T^3- España)
DDM-UGR: http://www.ugr.es/~dpto_did/ ;
http://www.ugr.es/~dpto_did/docencia.htm#secundaria
http://www.t3ww.org/index.html
http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers.html
http://www.kutzler.com/bk/bk.html

viii

VIII.2. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Bedoya, E. (1998) Estudio didáctico en torno a los conceptos básicos del Análisis Matemático basado en la visualización y las nuevas tecnologías graficadoras. Memoria de Tercer Ciclo, DDM-UAB.

Craine, T. (1996) "A graphical approach to the quadratic formula", *The Mathematics Teacher*, vol. 89, nº 1, January, 1996.

Demana, F. & Waits, B. (1992) A computer for *All* Students. *Matematics Teacher*, 85, February, 1992. 94-95.

Edwards, T. (1996) "Exploring Quadratic Functions: From *a* to *c*", *Mathematics Teacher*, vol. 89, nº 2, February, 1996.

Finney, R., Thomas, G., Demana, F., Waits, B. (1994) *Calculus - Graphical, Numerical, Algebraic.* Addison-Wesley, USA.

García, A., Martínez, A. y Miñano, R. (1995) *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Síntesis, Madrid.

Kakol, H. (1997) "Graphical calculators and problem-solving", *Mathematics Teaching*, 158, march, 1997.

Kaput, J. (1992) "Technology and Mathematics Education", in Grows, D. A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, New York. (p. 515-556).

Kindt, M. (1995) "Problema antiguos y la calculadora gráfica", en *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 4, 41-52.

Kutzler, B. (1996) *El taller de la TI-92*. Madrid: *Texas Instruments*.

Mesa, V. M. (1996) *"Experts solving problems on functions: the role of the graphing calculator*. PLACEM Proyect-Latinoamérica.

NCTM (1991) *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Edición en Castellano: SAEM «THALES», Sevilla.

Rico, L. (Coord.) (1997) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori – ICE-UB, Barcelona. (Capítulos: 1, 2, 4 y 8).

Rico, L. (Ed.) (1997) *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Síntesis, Madrid. (Capítulos: 1, 2 y 7).

Romberg, T.; Fennema, E. and Carpenter, T. (Eds.) (1993) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Ruthven, K. (1990) "The influence of graphic calculator use on traslación from gráphic to symbolic forms". *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, pp. 431-450.

Texas Instruments (1995) *Manuales de usuario de la TI-83 y TI-92.*

Vonder, CH. (1996) "Exploring Parametric Transformations of Functions", in *Mathematics Teacher*, vol. 89, nº 3.

Waits, B. y Demana, F. (1995) "La reforma de las Matemáticas y el papel de la tecnología". En *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, Barcelona: GRAO.

4.5.2. Planificación y estructura de la primera sesión

En el Anexo 2 se pueden consultar los documentos con información detallada sobre el diseño, programación y guiones de cada una de las diez sesiones del curso-taller; y en el Anexo 3 se encuentran las transcripciones de los vídeos y casetes de audio correspondientes al desarrollo de cada una de estas diez sesiones. En esta sección se presenta un extracto de la programación y guión correspondientes a la primera sesión y en la siguiente sección se presenta la programación y el guión correspondiente a la quinta sección. Consideramos que esto es suficiente para ilustrar el carácter y estructura de cada uno de los guiones y programaciones respectivas de todas las sesiones del curso-taller. Durante las cuatro primeras sesiones se trabajó con la CG modelo TI-83; y a partir de la quinta se trabajó con la supercalculadora TI-92. Estas cuatro primeras sesiones de trabajo con la TI-83 corresponde a la primera parte del programa (fases F-I y F-E.1) y las seis restantes sesiones de trabajo con la TI-92 corresponden a la segunda parte del programa.

A continuación presentamos el extracto de la programación, guión y actividades más importantes de la primera sesión. También, incluimos, cuando lo consideramos necesario (por ser complementarias), algunas actividades de las otras tres sesiones correspondientes a la primera parte del programa. De esta forma, se espera poder ilustrar sobre el tipo de trabajo que realizamos para promover situaciones didácticas prácticas (pero fundamentadas desde puntos de vista didáctico, curricular y constructivista) y reflexiones conjuntas al respecto entre los futuros profesores de matemáticas que participaron en esta tercera edición del programa.

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso:

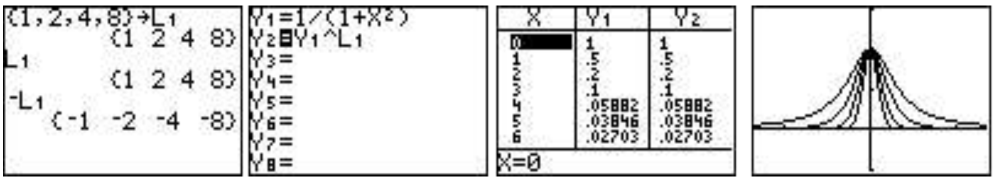
CALCULADORAS GRAFICADORAS Y ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Profesorado:

Luis Rico*, *José Gutiérrez (Dirs.)*, *Evelio Bedoya* y *José Ortiz

* * * * *

I Sesión (Lunes 22-III-99, 3hs): **Introducción general del curso y primeras actividades con la CG TI-83.**



Guión de trabajo:

I.1 Presentación general del curso

- Entrega del cuadernillo con el programa general y comentarios.
- El icono “🖩⇨ 👥 ⇨✍”, se inserta para que recordemos que debemos realizar: (a) Exploraciones con la CG; (b) reflexionar individual y en grupo sobre estas exploraciones y, (c) tomar nota de las distintas cuestiones, conclusiones, dificultades y todo aquello que consideremos relevante.
- Observaciones sobre las encuestas y tareas (inicial, intermedias y final).

- Los alumnos deben disponer de un cuaderno de trabajo donde irán registrando sus reflexiones y producciones, especialmente aquellas que se les solicite durante cada sesión.
- En términos generales, durante el desarrollo del curso se trabajará individualmente y en grupos pequeños (un grupo por cada mesa). Luego habrá una puesta en común entre los miembros de cada grupo y al final de cada una de las sesiones habrá una puesta en común general.
- Unos de los objetivos del curso consiste en fomentar la reflexión compartida y la autonomía en el trabajo y conocimiento didáctico profesional del futuro profesor de matemáticas.
- Los 15 primeros minutos de cada sesión diaria los dedicaremos a revisar y reflexionar sobre actividades y cuestiones pendientes.

I.2. Las tres preguntas claves para la reflexión al final de cada sesión

La reflexión general, al final de cada sesión, estará orientada por las **tres preguntas claves** siguientes:

1ª. ¿Qué he aprendido sobre las funciones en general y sobre las funciones, el trinomio y las ecuaciones cuadráticas en particular?

2ª. ¿Qué he aprendido en relación con el conocimiento y dominio de las calculadoras graficadoras?

3ª. ¿Qué he aprendido como profesor de matemáticas sobre la enseñanza de estos contenidos matemáticos, concebidos desde la triple perspectiva conceptual, procedimental y representacional?

I.3. La CG TI-83: Presentación y primera toma de contacto

I.3.1 Presentación de la CG TI-83

- Las modernas CG en realidad son pequeños ordenadores de bolsillo, relativamente potentes, fáciles de manejar y económicos, diseñadas exclusivamente para enseñar, estudiar y aprender, e incluso, investigar matemáticas.

- En los últimos tres lustros en muchos países, de acuerdo con las cada vez mayores y mejores utilidades curriculares y didácticas de estas herramientas, se están llevando a cabo importantes e innovadoras propuestas y reformas curriculares. Propuestas curriculares y didácticas relacionadas con una enseñanza de las matemáticas basada en un mayor énfasis en la pluralidad, particularidad y articulación de los sistemas de representación numérico, gráfico, algebraico y analítico (**NGA**), en la visualización e introducción intuitiva de algunas nociones y procedimientos matemáticos importantes, en la modelización y solución de problemas y situaciones interesantes y en la exploración e investigación de fenómenos y procesos matemáticos propiamente dichos.

ii

Por otra parte, el interfaces teclado-pantalla (96×64 pixeles), permite no sólo visualizar, manipular y explorar de forma NGA, ecuaciones, relaciones, funciones, gráficos, tablas de datos y figuras geométricas, sino que permite también corregir los errores de introducción y edición de los datos de un problema, antes de volver a intentar resolverlo.

La TI-83 se puede programar (cuenta con 32 Kbytes de memoria), mediante un lenguaje de programación sencillo, para que realice cálculos, iteraciones e ilustraciones que involucren procedimientos repetitivos, recurrentes y rutinarios con sucesiones de valores numéricos, familias de curvas, etc.

I.3.2. Primera toma de contacto con la TI-83

Instrucciones sobre principales teclas, comandos, funciones, menús y opciones. Notación y nomenclatura que utilizaremos en estas sesiones y en el curso.

I.3.3. Configuración inicial y puesta a punto

- Para restablecer los parámetros por defecto de la TI-83 y limpiar la memoria para borrar datos y variables introducidos con anterioridad, que pueden entorpecer y ralentizar los próximos trabajos, siga los siguientes pasos:

  i. Encienda la calculadora: ×
  ii. Active o despliegue el menú *MEMORY* (*MEM*): ↓ (2 ↔).
  iii. Pulse 5 (o con los comandos del cursor) elija la opción-menú 5: *Reset...*
  iv. Seleccione la opción-menú 1*: All Memory...*
  v. Ejecute la opción 2*: Reset.*

  Nota: Al realizar este proceso se borrará toda la información introducida por el usuario en la memoria y se restablecerán los parámetros de configuración inicial (de fábrica) de la calculadora. Después de este proceso, quizás sea necesario volver a ajustar el contraste de la pantalla.

- Para regresar a la pantalla principal (pp), llamada también pantalla de inicio (*HOME*), pulsar M (o ejecutar el comando *QUIT* pulsando 2 3).

I.3.4. Configuración inicial y previa a cada actividad

- **A.I.1:** Explore las diferentes opciones de los siguientes menús:
  - *MODE* Menú de config. inicial y previa 3
  - *MATH*Menú de opciones matemáticas usuales 3

- **A.I.2:** Grado de precisión y número de dígitos de la TI-83 “🖩 ⇨ 👥 ⇨ ✍”

:::

Los errores de aproximación obtenidos mediante un instrumento de cálculo dependen tanto de la fórmula y método matemáticos, como de las características tecnológicas empleados en su diseño. Cuando la TI-83 realiza cálculos numéricos (reales y complejos) almacena en la memoria de trabajo hasta 14 cifras con un exponente de dos cifras y cuando muestra o visualiza un valor en la pantalla, lo redondea, según esté especificado en la opción *Float* del menú *MODE*. Esta característica permite definir el número de cifras en la fracción decimal, con hasta 10 dígitos y un exponente de 2 dígitos.

- Observe que la dimensión y presentación de la pp es de 8×16 filas y columnas de caracteres (96×64 pixeles).

- Compruebe las afirmaciones anteriores. P.ej., Calcule 2÷3 con la TI-83. ¿qué observa?

- En relación con la precisión de las coordenadas de los gráficos, el cursor se desplaza discretamente en base a los saltos consecutivos de las variables X e Y, efectuados de acuerdo con las fórmulas que se dan a continuación y a partir de las cuales también se pueden estimar los errores de aproximación de la TI-83.

$$\Delta x = \frac{X_{max} - X_{min}}{94} \qquad \Delta y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{62}$$

I.3.5. Las CG como tecnología mediática de representación, visualización y modelización

Las CG están diseñada como un medio de visualización, representación NGA y modelización de conceptos, procedimientos y situaciones problemas matemáticas; en particular, como una modelización del plano. En este sentido, además de un instrumentos mediadores de representaciones constituyen un interesante objeto de estudio matemático y geométrico.

- **A.I.3:** Geometría de la CG: la pantalla de la TI-83 como una modelización del plano euclidiano “🖩 ⇨ ⇨ ✍”

(a) El conjunto de todas las posibles parejas de números reales constituye un modelo aritmético del plano Euclidiano. Describa y caracterice los puntos de la pp de la calculadora como una pareja de números decimales y la pp como un modelo (¿Euclidiano?) del plano.
(b) Determine el número de puntos del “plano TI-83”.
(c) Describa la circunferencia unidad sobre esta plano.
(d) Considere alguna otra idea de estudio de la geometría del plano TI-83.

I.4. Descripción general de la TI-83 y revisión del manual de usuario.

I.4.1. Descripción general de la CG TI-83
Véase guión y programación de la primera sesión en los anexos

I.4.2. Entrega y revisión del manual de usuarios de la TI-83

iv

I.5. Primeras actividades didácticas con la TI-83

I.5.1. A.I.4: Solución de ecuaciones de segundo grado en la pantalla principal (HOME) de la TI-83 “🖩⇨👥⇨ ✍”

- Lea las páginas 7 a 9 del manual de usuarios y realice las actividades que se proponen usando la CG TI-83.
- Reflexione y tome nota sobre las ventajas e inconvenientes de este tipo de actividad o tratamiento de la ecuación cuadrática desde un punto de vista didáctico.

I.5.2. A.I.5: Más utilidades didácticas de la TI-83 “🖩⇨👥⇨ ✍”

Véase guión y programación de la primera sesión en los anexos.

I.5.3. A.I.6: Las opciones del menú *LIST* (*OPS*) “🖩 ⇨👥⇨ ✍”

Véase guión y programación de la primera sesión en los anexos.

I.5.4. A.I.7: Explore los pares de comandos (teclas) siguientes. Describa y explique brevemente sus funciones y utilidades didácticas

- |, • “🖩 ⇨👥⇨ ✍”
- M, *QUIT* (23)
- {, □
- {, *INS* (ψ {)
- *ANS* (ψ ⊂) y *ENTRY* (ψ ⊆) (*Last Answer* y *Last Entry)*

I.6. Utilidades NGA (numéricas, gráficas y algebraicas) de la TI-83

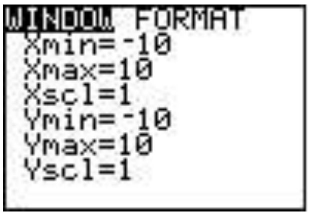
I.6.1. Comandos y menús de edición, visualización y exploración NGA de funciones

Las cinco teclas azules o, π, θ, ρ y σ, situadas al pie de la pantalla, junto con sus menús asociados (segundas opciones), ***Calculate*** (ψ+ρ) y ***Table*** (ψ+σ), son las teclas más importantes para la edición, visualización y exploración NGA de funciones, expresadas en coordenadas cartesianas, paramétricas o polares, dependiendo de la opción seleccionada en el menú de configuración inicial *MODE*.

- La tecla o sirve para definir explícitamente funciones (cartesianas) Y_k, k = 0, 1, 2,...,9. Defina $Y = V(x)$ del “problema de la caja” de la página 10 del manual.
- La tecla π activa el menú de definición de las variables de los rectángulos o ventanas de visualización de las gráficas y la tecla o comando θ, da acceso a un menú desplegable que permite ajustar rápidamente y de diversas formas estas variables, permitiendo así, explorar, manipular y analizar interactivamente las gráficas de funciones.
- Las dimensiones del rectángulo o ventana de vizualización están definidas por los valores de las variables: X_{min}, X_{max}, X_{scl} , Y_{min} , Y_{max} e Y_{scl}.

v

P.ej., X_{min} = -10, X_{max} = 10, Y_{min} = -10, Y_{max} =10 y los valores X_{scl} = 1 e Y_{scl} =1 (que indican las distancias entre dos marcas de las variables x e y), definen la "ventana de visualización estándar" de la CG (figura de la izquierda).



- Explore la opción 6: *ZStandard* de la tecla o menú θ, conjuntamente con la tecla π y defina una ventana de visualización apropiada para la gráfica de la función del problema anterior (problema de la caja del manual, p.10). Revisar las páginas 13 y 14 del manual.
- Lea la página 16 y explore las distintas opciones del menú *ZOOM* (figura anterior, derecha).

• La opción ρ permite explorar la gráfica de una función mediante el desplazamiento del cursor de un punto a otro, visualizando a la vez, las coordenadas X e Y(X), del punto donde está situado el cursor "*trace"* en ese instante.

- Lea la página 15 del manual y explore la gráfica que se propone, usando el comando ρ.

I.6.2. Otros comandos de edición de funciones

• Las cuatro teclas de control del cursor: |, ~, □, }, conjuntamente con las cinco teclas de edición de funciones (o, π, θ, ρ y σ), constituyen las herramientas principales de representación, manipulación y exploración NGA de funciones matemáticas. Esta es una de las principales utilidades didácticas para la representación y visualización que justifica la utilización de las CG como herramienta de apoyo para la enseñanza de las matemáticas.
• Las teclas y menús □, ***Calculate*** (ψ+ρ) y ***Table*** (ψ+σ), permiten el acceso directo a un gran número de funciones elementales (sin sobrecargar la memoria), presentan información numérica en forma de tablas prácticamente infinitas y permiten calcular valores de funciones, ecuaciones, raíces, intersecciones de gráficos, valores extremos, derivadas numéricas e integrales definidas.

- Revise las páginas 17 y 18 del manual, reflexione y discuta con su compañero de mesa sobre las utilidades didácticas de estas funciones o comandos de la CG.

I.7. Otras utilidades curriculares y didácticas de la TI-83 y resolución de problemas

I.7.1. Taller 1 (A.I.8): Un problema típico de crecimiento exponencial

Véase guión, programación y anexos de la primera sesión. “▮ ⇨ ⇨ ✍”

- Resolver el problema como se resuelve canónicamente
- Resolverlo ahora en la pantalla inicial (HOME) de la calculadora, siguiendo las siguientes instrucciones:

i) Configuración previa de la CG mediante los comandos *MODE* y *MEM*.

ii) Escriba la expresión $1500(1 + .075/12)^{(12\times 2)}$ y pulse ⊆. Compare las expresiones que aparecen en la pantalla de la CG con la expresión convencional.

iii) Mediante las distintas utilidades de la CG obtenga los valores que pide el problema.

I.6.2 A.I.8: Resolver ahora el problema mediante un tratamiento gráfico y numérico

Siga las siguientes indicaciones: “▮ ⇨ ⇨ ✍”

- Defina $Y_1 = 1500(1 + .075/12)^{(12\times T)}$ y utilice de manera complementaria las utilidades numéricas y gráficas de la TI-83 (Observe la figura siguiente).

- Reflexione acerca de ¿Que diferencias conceptuales y didácticas encuentra entre el tratamiento gráfico y el algebraico?

I.7. Otras utilidades didácticas de la CG: Posibilidad de articular múltiples SR

I.7.1. Las opciones de pantalla dividida y del menú *ZOOM*

Véase guión y programación de la segunda sesión en los anexos

I.7.2. Edición y exploración NGA de funciones: Las funciones racionales cuadráticas

- **A.II.2: La noción de “gráficas completas”**

(i) Configure apropiadamente la TI-83 (menús *MODE* y *WINDOW*) para obtener “gráficas completas” de las funciones definidas mediante las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $Y = 2X^2 + X + 3$ **(b)** $f(X) = X^3 - 2X^2 + X - 30$

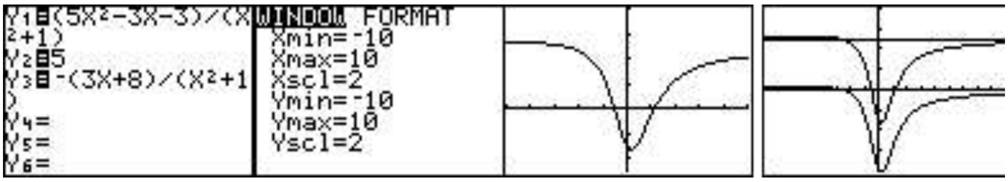
(ii) Mediante los comandos ρ y [*TABLE*] (ψ+σ) explore, tanto gráfica como numéricamente cada una de las funciones anteriores y determine sus principales propiedades y comportamientos.

(iii) Haga una pequeña reflexión sobre los aspectos procedimentales, conceptuales y representacionales en (i) y (ii).

vii

- **A.II.5: Estudio de funciones racionales (cuadráticas)**

  Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x - 3}{x^2 + 1}$



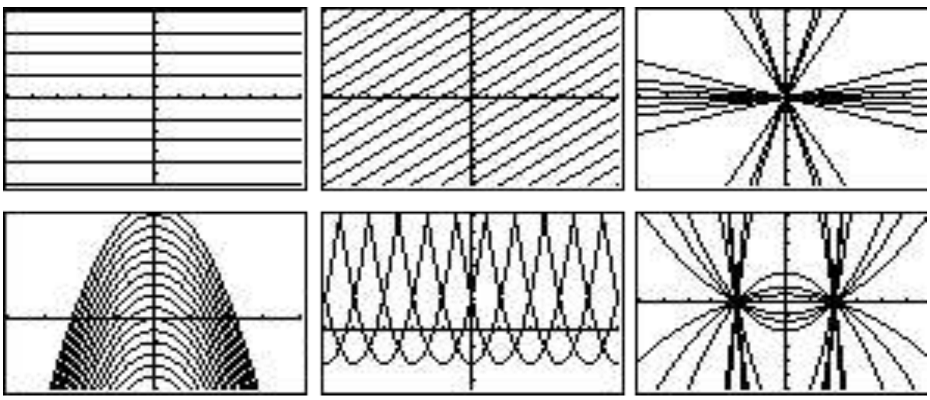
Dibuje o trace en el papel con la ayuda de la CG una gráfica completa de *f*. Siga los pasos indicados en la orientación didáctica dada a continuación:

i) Descomponer *f* en sumandos mediante división de polinomios.
ii) Trazar una gráfica completa de *f*
iii) Determine las relaciones de la gráfica de *f* y de sus demás tipos de representación con las de los sumandos.
iv) Hallar las coordenadas de los "puntos críticos" de *f*. (Véase anexo 2, I Sesión)
v) Determinar los valores que toma *f* para valores grandes de *x*. Visualizar y analizar las asíntotas (p.ej., intersección con la gráfica, posición relativa, etc.)
vi) Resolver la ecuación $f(x) = 0$
vii) Resolver la inecuación $f(x) \geq 0$ y visualizar (mediante la opción 7:*Shade* del menú *DRAW*) la región correspondiente.

I.8. Estudio global de funciones: Gráficas completas y familia de funciones

Estudio global de funciones como alternativa al estudio clásico basado principalmente en lo local o puntual. Gráficas completas y familia de gráficas de funciones (Véase guión y programación de la segunda sesión en los anexos).

- **A.II.3:** Diseños y patrones de gráficas de funciones lineales y cuadráticas (configuraciones de rectas y parábolas).



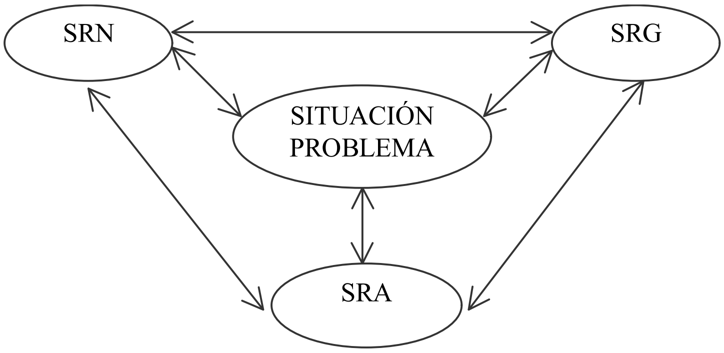
viii

- **A.II.4: El *a*, *b*, *c* de las funciones cuadráticas** ($y = ax^2 + bx + c$)

Con estas dos actividades, basadas en el uso de la CG, se pretende fomentar la coordinación y "conversión" o "traducción" entre los distintos sistemas de representación (NGA). De este modo se consigue una mejor y más significativa (con contenido) comprensión del papel de los parámetros ***a, b, c*** sobre las representaciones gráficas respectivas.

I.9. Calculadoras graficadoras (CG) y Resolución de Problemas (RP)

- A continuación presentamos un esquema y unas orientaciones didácticas generales de nuestras propuestas para la resolución de problemas. Éstas están basadas en la posibilidad y conveniencia de articular múltiples SR (numérico SRN, gráfico SRG y simbólico-algebraico SRA), la modelización y el empleo de nuevas tecnologías informáticas como las CG TI-83 y TI-92.



- Orientación general para la resolución de problemas desde nuestra perspectiva didáctica basada en la articulación de diferentes SR y el uso de CG:

- **i)** Obtener una expresión de la forma $y = f(x)$ que modelice el problema.
- **ii)** Configurar la CG de acuerdo con el contexto del problema.
- **ii)** Trazar una "gráfica completa" de f.
- **iii)** Determinar las características fundamentales de f (Dom_f , Ran_f, etc.), relevantes para la situación problema.
- **iv)** Obtener los valores de x que tienen sentido en el contexto de la situación problema.
- **v)** Restringir la gráfica de acuerdo con la situación problema.
- **vi)** Resolver el problema utilizando la CG y procedimientos basados en la articulación de diferentes tipos de representación.

I.10. Reflexión final y conjunta sobre los temas tratados en esta sesión

I.10.1. El modelo triádico de los organizadores del currículo.

I.10.2. Reflexión y puesta en común guiada por las tres preguntas claves formuladas en la sección I.2. (pág. ii de éste guión).

4.5.3. Programación y guión correspondientes a la quinta sesión

A partir de la siguiente página presentamos el diseño, planificación y estructura correspondiente a la quinta sesión del curso-taller. Esta sesión marco el comienzo de la segunda del programa (fases F-E.2 y F-F). En esta segunda parte cambiamos la tecnología inicial (CG TI-83) por una mucho más potente (la CG TI-92), que resultó mucho más atractiva ("fascinante") para los alumnos. En realidad, no cambiamos de tecnología sino que introducimos la nueva e hicimos más énfasis y le dimos prioridad al trabajo con esta nueva calculadora. Además, teniendo en cuenta la experiencia de los alumnos adquirida previamente con la TI-83, decidimos que, salvo la presentación y descripción general de la nueva tecnología, los alumnos iban a empezar a trabajar por su propia cuenta, reconociendo inicialmente estos elementos comunes entre los dos modelos de calculadoras.

A continuación presentamos una síntesis amplia de la programación y guión correspondiente a la quinta sesión del curso-taller.

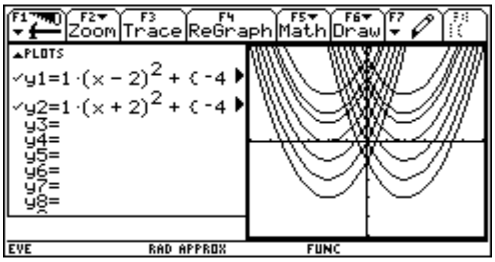
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Curso-taller:

CALCULADORAS GRAFICADORAS Y ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Profesorado:

Luis Rico, ***José Gutiérrez*** *(Dirs.)*, **Evelio *Bedoya*** y ***José Ortiz***



LA TI-92:

UN NUEVO ORGANIZADOR PARA EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

V Sesión (Viernes 27-III-1999,3hs):

Programación y guión de trabajo:

V.0. Reflexión y valoración conjunta sobre el primer bloque de sesiones con la calculadora graficadora TI-83.

V.0.1. Revisión de tareas y cuestiones pendientes.

V.0.2. Conclusiones (consensuadas) sobre el bloque de sesiones con la TI-83:

- Revisión de mapas conceptuales (tarea inicial).
- Debate sobre los trabajos presentados.
- Reflexión y valoración conjunta sobre las ideas de participantes acerca de la enseñanza y comprensión de las funciones (polinómicas de segundo grado), la ecuación cuadrática y problemas afines, basadas en la articulación de SR y las utilidades didácticas de las NTI como las CG TI-83. Ventajas e inconvenientes de los dos tratamientos didácticos: el clásico y el basado en los SR y la CG.

Esta reflexión y valoración puede estar orientada por las tres preguntas claves del curso. Además, la valoración puede hacerse en términos de la temporalización, el contenido y metodología. ¿Qué sugieren agregar, quitar o modificar?

DESCANSO

V.1 La TI-92: un nuevo elemento organizador del currículo de matemáticas

V.1.1 Presentación y descripción general de la "supercalculadora" graficadora TI-92

- Entrega de la TI-92 y primera toma de contacto.
- **A.V.1:** La pantalla inicial o principal (*HOME*) de la TI-92.
- **A.V.2:** Gestión de la memoria, reinicio, configuración inicial y puesta a punto
- **La CG TI-92:** Concebida, tecnológicamente como un miniordenador portátil, diseñado exclusivamente para enseñar, estudiar e investigar en matemáticas y como un mediador y generador de espacios de representación, visualización y modelización; y, en Educación Matemática, como un organizador curricular que, junto con otros organizadores curriculares, tales como: el conocimiento matemático, los SR y un Programa de formación inicial sobre conocimiento profesional, estructuran un modelo organizador del currículo particular.
- Como dice el profesor Pepe Gutiérrez, "esta máquina no sólo es una herramienta sino también una metodología de enseñanza y estudio de las matemáticas". En nuestro grupo, concebimos estas modernas tecnologías como potentes utilidades mediadoras e interactivas de representación, visualización y modelización de conceptos, procedimientos y problemas matemáticos. En estas ideas subyace la concepción de las modernas CG como tecnologías de representación, organizadoras del currículo de matemáticas de Educación Secundaria (Rico, 1996).

i

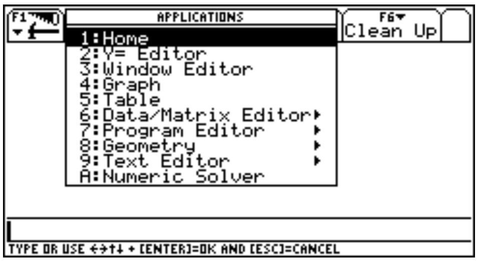
- **Principales características tecnológicas y utilidades curriculares de la TI-92**

  La pantalla, de gran dimensión y alta resolución (240×128 pixeles; la TI-83 tiene 96×64), permite visualizar con cierta claridad y simultáneamente, gran cantidad de texto, símbolos y gráficas. Esta posibilidad constituye una de sus más interesantes utilidades didácticas, toda vez que una misma pantalla admite interactivamente varios pasos de un procedimiento y permite visualizar a la vez, dos tipos de aplicaciones y representaciones (algebraica-gráfica, gráfica-tabla, etc.). La TI-92 dispone de una capacidad de memoria relativamente grande: 70 KBytes para la TI-92 estándar y 188 KBytes para la TI-92 *Plus*.

  Los sistemas de teclados *QWERTY*, numérico, científico y de funciones (F_n), corresponden con los teclados ya familiares de una calculadora convencional y de un ordenador. Esto facilita la introducción y edición de datos. El modelo de teclado de control del cursor tiene 8 direcciones y funciona de manera similar que el ratón de un ordenador portátil.

  La opción *Pretty Print* del menú de configuración *MODE*, permite visualizar en pantalla radicales, fracciones (irreducibles) y exponentes en superíndices del mismo modo como aparecen en los libros de texto.

- **Descripción general de la TI-92: Aplicaciones**



La TI-92 tiene incorporado un potente **sistema de cálculo simbólico** (SCS) similar al *DERIVE*, que incluye múltiples funciones y comandos ejecutables interactivamente sobre expresiones algebraicas, trigonométricas y analíticas, tales como simplificación, desarrollo, descomposición factorial, resolución de ecuaciones, cálculo numérico y simbólico de límites, derivadas, integrales (definidas, indefinidas e impropias) y polinomios de Taylor. La opción matricial incluye definición, edición y cálculo de matrices, tal como, inversas, determinantes, transposición y matrices diagonales y escalonadas.

La aplicación de **Geometría interactiva** (**Geometry**) basada en el conocido *Cabri-Geometry II*, diseñada para enseñar, estudiar e investigar geometría euclidiana, métrica y analítica. Permite realizar construcciones geométricas interactivamente por medio de puntos, segmentos, rectas, triángulos, polígonos, círculos y otros objetos geométricos básicos, trazar rectas perpendiculares y paralelas, trasladar, rotar, ampliar, comprimir y dinamizar diversas figuras y construcciones geométricas.

ii

Las **opciones gráficas** incluyen representaciones en 2D (en coordenadas rectangulares, polares, ecuaciones paramétricas, sucesiones recursivas) y representaciones en 3D. Las herramientas disponibles van del zoom al análisis gráfico interactivo de curvas. Se pueden visualizar simultáneamente dos entornos gráficos separados.

La aplicación de **programación (Program Editor)**, limitada sólo por la disponibilidad de memoria, significa adaptabilidad a través de macros y programas a las necesidades del usuario. Las instrucciones de programación incluyen pruebas de condiciones para bifurcaciones múltiples, bucles, subrutinas y soportes de parámetros y variables, mediante menús personalizados, cuadros de dialogo que facilitan la programación, de forma que los programas permitan uso completo de la interfaz de diseño. Usuarios de muchos países han desarrollado y están desarrollando numerosos programas y aplicaciones que comparten a través de diversas publicaciones y páginas webs en Internet .

El **editor de base de datos (Data/Matriz Editor)** numéricas y simbólicas (que incluye sistemas de análisis estadístico en una o dos variables con ocho modelos de regresión diferentes) y el **editor de textos (Tex Editor)** complementan a las demás aplicaciones, no sólo para escribir y editar informes, textos y tablas numéricas, sino que constituyen otra importante utilidad curricular y didáctica para la creación de entornos de enseñanza y aprendizaje interactivo y de generación de macros, representaciones, visualizaciones y modelizaciones algebraicas y analíticas ejecutables.

El diseño tipo interfaz integra las aplicaciones anteriores facilitando su utilización para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, procedimientos y problemas matemáticos.

V.1.2 Entrega y revisión del manual de usuarios de la TI-92

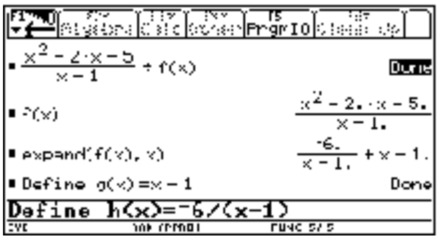
- Complementar la anterior información con la revisión de las partes que considere necesarias del manual de usuario, páginas I.1 a II.44.

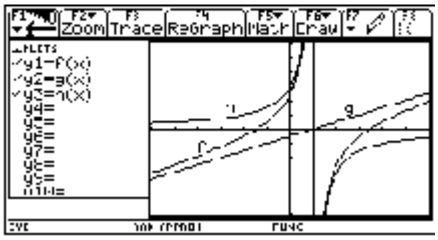
V.2. Taller V.1: Primeras actividades didácticas con la TI-92

- **A.V.2: Ejercicios iniciales del manual de usuario de la TI-92**
  - Resuelva los ejercicios de la p. I-5 y I-6 del manual de la TI-92.
- **A.V.3: Estudio general de funciones racionales cuadráticas con la TI-92**

  - Copie la expresión $\dfrac{x^2-2x-5}{x-1}$ del ejemplo 2 de la p.I.5 (Sesión I), defina la función racional cuadrática correspondiente, trace una gráfica completa, analice sus comportamientos y determine sus principales propiedades. (Véase guión de la IV sesión y figura siguiente).

iii





- **A.V.4: Visualización de raíces complejas de polinomios (cuadráticos)**

En esta actividad veremos como, en virtud de las posibilidades del SCS y las utilidades gráficas 3D de la TI-92, podemos visualizar lo que antes, cuando aun no existían estas tecnologías de representación, resultaba prácticamente imposible de visualizar, al menos física o materialmente. La idea de fondo es la misma que la visualización de ceros reales de un polinomio o función cuadrática, asociándolos con las intersecciones de la gráfica con el eje *Ox*.

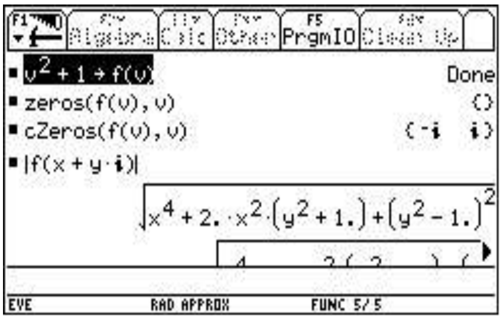
- Visualicemos las raíces complejas del trinomio de segundo grado dado por:

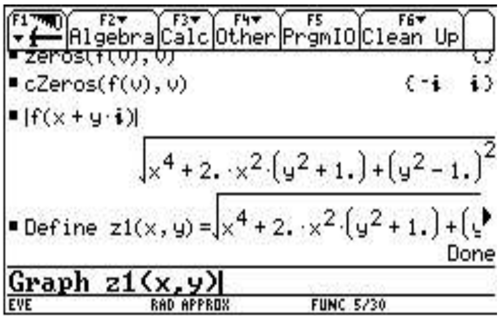
$$x^2 + 1$$

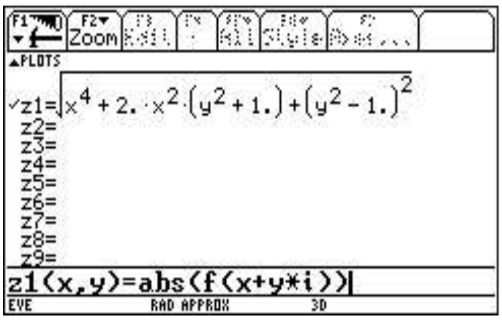
- El problema se reduce a dibujar con la TI-92 la "superficie módulo" asociada con el trinomio o polinomio (véanse los pasos correspondientes en página siguiente).

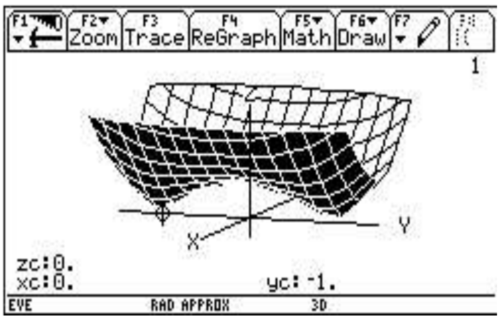
- La superficie módulo asociada con un polinomio $f(x)$ está definida como la función de 2 variables $z(x, y) = \text{abs}(f(x + yi))$.

- Todas las raíces complejas (incluyendo las reales) de un polinomio dado, pueden ser visualmente identificadas con los puntos donde la superficie módulo asociada con el polinomio corta o toca al plano *xy* (observe la siguiente secuencia de figuras, tomadas de sucesivas ventanas de visualización de la CG TI-92).









iv

- (i) Defina $x^2 + 1 \to f(x)$ ⌈ $x^2 + 1$ ♣ $f(x)$
- (ii) Obtenga las raíces o ceros complejos de $f(x)$ ⌈ $cZeros(f(x), x)$
- (iii) Calcule abs($f(x + yi)$). Observe qué tipo de función obtiene.
- (iv) Defina $z_1(x, y) = \text{abs}(f(x + yi)) = |f(x + yi)|$.
- (v) Configure adecuadamente la calculadora (menús *MODE, Format...* y *WINDOW*) para obtener la gráfica 3D de la superficie módulo asociada con la función cuadrática $f(x)$.
- (vi) Explore la gráfica con la utilidad *TRACE* (□) y compruebe que $-i$ e i son ceros complejos de f. O sea, que en los puntos (0, -1) y (0, 1), z=0 (observe la figura inferior-derecha).

- **A.V.5: Breve introducción a la Aplicación de Geometría Interactiva de la TI-92 (*Cabri-Geometry II*)**

(a) Lea las páginas I-9 a I-12 del manual de usuario.
(b) Represente geométricamente el problema de Kindt (Guión III Sesión) e ilustre gráfica, numérica y analíticamente su solución.

V.3. Resolución de problemas utilizando la TI-92 "▪ ⇨ ⇨ ✍"

Guía sobre opciones de la TI-92 para la resolución de problemas

- Uno de los contextos educativos donde mejor se pueden utilizar y apreciar las posibilidades de las calculadoras gráficas, concebidas como organizadores y transformadores del currículo y como instrumentos mediadores de representación, modelización y visualización, es, naturalmente, en las situaciones de resolución de problemas.

- Algunas de las principales propuestas innovadoras para la transformación y mejoramiento curricular y didáctico, derivados de una introducción razonablemente eficaz de las CG en el aula y en el currículo de matemáticas pueden ser las siguientes:

- Múltiples opciones de representación, modelización, visualización, resolución y tratamiento de situaciones problemas y de enseñanza/aprendizaje utilizando la calculadora graficadora TI-92.

- Las opciones de pantalla dividida (*Split Screen*) y doble gráfica (*Two Graph*) del menú 3.

- Las opciones del menú *F*4: *Other*: Estudio general de funciones.

- Los sistemas de coordenadas en la TI-92: Estudio de familias de funciones.

- Estudio de familias de parábolas de las formas $\boldsymbol{y = ax^2+bx+c}$ y $\boldsymbol{x = ay^2+by+c}$.

- Las CG pueden ser usadas como herramienta para realizar "realmente" y más intuitivamente manipulaciones y exploraciones numérica y gráficas y después "'confirmar" los resultados usando métodos algebraicos o analíticos. Y, recíprocamente, usar métodos visuales intuitivos como apoyo para la comprensión de resultados obtenidos algebraica o analíticamente. Esto permite además, articular y explorar diversos tipos de representación.

- Las CG pueden ser usadas para trabajar numérica y gráficamente problemas difíciles e incluso imposibles de resolver por parte de estudiantes principiantes mediante métodos algebraicos o analíticos convencionales.

- Muchos problemas matemáticos difíciles los pueden resolver los profesores y estudiantes de manera sencilla mediante simulaciones y modelizaciones conseguidas utilizando una CG como la TI-92.

- A través de CG como la TI-92 se pueden realizar hipótesis, exploraciones, pruebas y cálculos aproximados asociados con determinadas situaciones problemas y fenómenos.

- Las diferentes opciones de representación, modelización y simulación que permiten las CG como la TI-92, facilitan el estudio de problemas y conceptos matemáticos en diferentes ámbitos, permitiendo así la interconexión de diferentes bloques de contenido como Álgebra, Geometría, Análisis, etc.

- En esta sección nos proponemos presentar algunos ejemplos de problemas que ilustran estas afirmaciones. Antes de proceder a resolverlos se recomienda volver a leer las orientaciones didácticas generales para la resolución de problemas formuladas en la pag. 1 del guión correspondiente a la III Sesión.

V.5. Ecuaciones paramétricas y simulación de movimientos

Otras de las principales utilidades curriculares y didácticas de las nuevas tecnologías de representación múltiple (como las CG TI-92) consisten en las múltiples posibilidades de representación, visualización, modelización y simulación de conceptos, procedimientos y situaciones problemas que ofrecen., facilitando de esta manera una mejor comprensión de las ideas matemáticas asociadas. En las siguientes actividades ilustramos algunas situaciones de simulación de movimientos y modelización de fenómenos y situaciones problemas.

- **A.V.5: Simulación del movimiento de una bola de billar**

Las siguientes ecuaciones paramétricas modelizan (la posición en el instante t) el movimiento de una bola de billar en una mesa de dimensiones L (90) y M (45) (que a su vez es modelizada por la pantalla de la calculadora):

$x(t) = abs(\mathrm{A} + ut - 2\mathrm{L}\,Int((\mathrm{A} + ut + \mathrm{L})/2\mathrm{L})$
$y(t) = abs(\mathrm{B} + vt - 2\mathrm{M}\,Int((\mathrm{B} + vt + \mathrm{M})/2\mathrm{M})$

vi

A y B son las coordenadas del punto de partida de la bola, y *u* y *v* corresponden a las coordenadas del vector de velocidad inicial.

Visualice la gráfica para distintos valores de A, B, *u* y *v* (p.ej., A = 0, B = 15; *u* = *v* = 1) en una vv apropiada.

(Sug.: Tome xmin = 0, xmax = 90, xscl = 0; ymax = 45 y yscl = 0).

V.6. Reflexión final y puesta en común en torno a las tres preguntas claves:

1ª. ¿Qué he aprendido sobre el contenido matemático tratado en la sesión?

2ª. ¿Qué he aprendido sobre calculadoras y tecnologías graficadoras utilizadas?

3ª. ¿Qué he aprendido sobre la enseñanza de estos contenidos matemáticos, basada en los enfoques y tecnologías propuestos en esta sesión?

vii

4.6. ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

La evaluación de la implementación es uno de los aspectos clave de un programa de intervención, por cuanto permite dar cuenta de si su puesta en funcionamiento o implementación ha seguido las directrices teóricas y metodológicas previamente marcadas durante las fases de diseño y planificación. Los objetivos de este tipo de evaluación consisten, por tanto, en: analizar y describir cómo funciona el programa, tanto en la teoría como en la práctica y determinar los desajustes que hay entre lo planificado teóricamente y lo realmente ejecutado.

Siguiendo la literatura más reciente sobre la metodología de evaluación de programas (Alvira, 1991; Fernández-Ballesteros, 1996; Forns y Gómez, 1996; Martínez Mediano, 1998; De Miguel, 2000; Pérez Juste, 2000), para el proceso de análisis y evaluación de la implementación del programa, hemos seguido los siguientes pasos:

1. Descripción de los aspectos y elementos esenciales del programa según los documentos que los justifican y fundamentan (Capítulo IV, Apartado 4.6).
2. Recogida empírica de información a partir de distintos documentos (Capítulo III, Apartado 3.9).
3. Análisis comparativo y balance de los aspectos esenciales del programa de acuerdo a la planificación teórica y a la ejecución efectiva del mismo. Este estudio es el que realizamos en este apartado.

En los capítulos anteriores se han descrito amplia y detalladamente el diseño, la estructura y la planificación del programa, así como el marco metodológico, respectivamente. En los apartado 3.7 y 3.8 definimos y justificamos la necesidad de definir las dimensiones e indicadores de análisis y evaluación del programa en estrecha relación con los objetivos y metas del programa, así como con las distintas cuestiones que interesan analizar y evaluar, incluyendo las fuentes documentales y de información de soporte.

En este apartado sobre la implementación del programa, consideramos principalmente las tres primeras tipologías generales de análisis y evaluación mencionadas anteriormente y nos ocupamos especialmente de las dimensiones objetivas, referidas, en términos generales, a las características estructurales (D-O.1) y logísticas (D-O.2) del programa. Cada una de estas dimensiones tiene asociado su respectivo sistema de indicadores (véanse los apartados 3.7 y 3.8). Las dimensiones y sistemas de indicadores de carácter subjetivo se tendrán en cuenta en los próximos capítulos donde la evaluación estará centrada en los resultados y efectos del programa sobre los sujetos participantes. De todas maneras, debido a que no es posible aislar totalmente los aspectos subjetivos de los objetivos, aunque nos lo propongamos con fines de análisis, en diferentes momentos y situaciones aparecerán algunos de los aspectos subjetivos como referencia o interrelacionados de alguna forma con los objetivos. En todo caso, los análisis y evaluaciones que realizamos en este capítulo tienen un cierto carácter parcial en tanto que se refieren principalmente a los aspectos (dimensiones) de análisis y evaluación objetivos. Al final de esta memoria se presentarán los resultados definitivos y de manera integrada de los aspectos objetivos y subjetivos del programa.

En la práctica, y teniendo en cuenta las explicaciones anteriores, para realizar el análisis comparativo entre lo planificado y lo ejecutado, hemos seguido los siguientes pasos:

a) Revisión de documentos (programación y guiones de cada una de las sesiones, transcripciones de vídeos, tareas y producciones de participantes, encuesta de actitud, notas de campo, etc.) para determinar correspondencias y discrepancias entre lo diseñado y planificado y lo que realmente ha sucedido.
b) Reflexión (triangulación de investigadores, observadores y expertos consultados) basada en los resultados anteriores y orientada hacia la toma de decisiones para la redefinición y adecuación del programa (propuestas de cambio y mejora) en relación con los aspectos referidos a las dimensiones objetivas de análisis y evaluación.

Un hecho determinante para llevar a cabo este análisis ha sido la participación *in situ*, sistemática y permanente de los investigadores-evaluadores durante todas las fases del programa. Esto nos ha permitido el empleo de técnicas de triangulación de agentes en la toma de decisiones, lo cual da la necesaria garantía de validez empírica a las decisiones de cambio y mejora tomadas y propuestas para futuras generaciones del programa. De hecho, y tal como lo expresamos en el capítulo anterior (Sección 4.5), los sucesivos cambios y ajustes de cada edición han sido resultado de las reuniones periódicas de revisión y evaluación por parte del equipo investigador. En el Anexo 4 se presentan las transcripciones de las grabaciones de estas reuniones y los diferentes documentos con anotaciones relevantes al respecto, como son los cuadernos de notas de los observadores y de los mismos investigadores.

La principal estrategia de evaluación (triangulación) que practicamos entre los tres investigadores principales que conformábamos el equipo consistía en reunirnos con una agenda de cuestiones y consultas por parte del doctorando, las discutíamos, tomábamos nota y grabábamos estas discusiones; se transcribían las grabaciones, se intentaban resolver los interrogantes y dudas y se diseñaban las actividades que considerábamos convenientes. Este proceso se completaba con la revisión de la literatura al uso, realización de consultas a expertos e introducción a partir de estas discusiones de los cambios y mejoras que se consideraron pertinentes. La discusión en equipo, planteamiento y resolución de cuestiones y diseño de nuevas actividades fueron las actuaciones que conformaron la estrategia de evaluación desarrollada por parte del equipo investigador.

Por otra parte, esperamos a que transcurriese la semana de vacaciones para entregar las programaciones y guiones correspondientes a las cinco últimas sesiones (segunda parte del programa), previendo cambios y mejoras a partir de la experiencia, revisiones, evaluaciones, autoevaluaciones y toma de decisiones adquiridas y realizadas durante el desarrollo de las cinco primeras sesiones (primera parte del programa). De este modo, durante la semana de vacaciones de Semana Santa terminamos de reelaborar las planificaciones, programaciones y guiones previstas para la segunda parte del programa, a fin de garantizar una mejor eficacia del desarrollo de cada una de las sesiones restantes del curso-taller.

Algunos expertos que consultamos y nos asesoraron sobre el desarrollo del programa y la investigación, fueron entre otros los siguientes: Los profesores investigadores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, los doctores Luis Moreno (CINVESTAV), Ernesto Sánchez (CINVESTAV), Fernando Hitt (CINVESTAV), Eduardo Lacasta (Universidad Pública de Navarra), Salvador Llinares (Universidad de Sevilla) y Raimond Duval (IREM de Estrasburgo). La técnica seguida para estas consultas consistió en la presentación de un documento escrito sobre el problema de investigación o el programa a realizar y evaluar y sustentación oral por parte del doctorando. Algunas de estas consultas fueron realizadas inicialmente por correo electrónico. Formulamos algunas preguntas concretas sobre el estado actual de la investigación, el diseño y planificación del curso-taller y sobre los problemas que se nos habían presentado hasta esos momentos. También solicitamos información que pudiera interesar para el estudio. Los resultados de estas consultas, algunas de las grabaciones en cintas de audio, las transcripciones de los momentos más relevantes y algunos de los documentos que nos suministraron estos autores, están en los anexos y archivo del estudio, que reposan en la Biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

A continuación resumimos las tareas y cuestiones que tuvimos en cuenta para llevar a cabo el análisis y evaluación objetiva de la implementación del programa:

i) Determinar y describir los distintos aspectos esenciales del programa, tanto en su fase de diseño y planificación, como en la de instrumentación e implementación, en relación con las cuatro cuestiones centrales del estudio, o lo que es lo mismo, en relación con las dimensiones de análisis y evaluación del programa;

ii) Describir las técnicas e instrumentos utilizados en la recogida de los datos que nos han permitido recabar la información pertinente sobre cada uno de los aspectos esenciales asociados con estas dimensiones de análisis;
iii) Inferir conclusiones orientadas hacia la toma de decisiones consensuadas acerca de si el programa se ha ejecutado apropiadamente, los tiempos han sido adecuados, las

tareas han sido apropiadas y oportunas y las secuencias de actividades han sido y seguido el orden correcto.

Finalmente, indicamos de manera sucinta los distintos momentos y las partes que hemos considerado sobre el programa a efectos de ser analizado y evaluado. Es natural que un programa de intervención, como el nuestro, experimente modificaciones durante el tiempo y procesos de su realización y funcionamiento, por eso resulta necesario que su implementación se analice y valore sucesiva y regularmente durante las distintas fases y momentos de desarrollo del mismo. Para satisfacer esta condición de exhaustividad y temporalidad, hemos considerado los momentos y hechos más relevantes con respecto a los objetivos y dimensiones del programa y del estudio de cada una de las diez sesiones en las que se estructura el curso-taller,

Basándonos en el diseño de la investigación y del programa, inicialmente consideramos las distintas fases (F-I, F-E.1, F-E.2 y F-F)) como indicadores de la temporalización para la evaluación. Además, tal y como lo explicamos en los capítulos III y IV, también se han tenido en cuenta los resultados de las evaluaciones y las decisiones más relevantes para la introducción de cambios y mejoras del programa, producidas durante cada una de las generaciones anteriores (ensayos pilotos) del programa. Pero, teniendo en cuenta el gran volumen de información producida de este modo, optamos por organizar el análisis y evaluación de la tercera generación del programa en **dos partes**: una **primera parte**, corresponde a las fases inicial (F-I) y primera subfase de ejecución (F-E1); y una **segunda parte**, corresponde con la segunda subfase de ejecución (F-E2) y la fase final (F-F). Cada una de estas partes corresponde a la principal CG utilizada. En la primera parte se utilizó exclusivamente la CG modelo TI-83, y en la segunda se utilizaron las dos calculadoras y principalmente la TI-92.

4.7. ANÁLISIS DE LA PRIMERA PARTE DEL PROGRAMA: OBJETIVOS GENERALES, CONTENIDOS Y TEMPORALIZACIÓN

Tal y como lo hemos dicho, la primera parte del programa corresponde con las fases inicial (F-I) y primera subfase de ejecución (F-E.1). Por lo tanto, corresponde, a su vez, con las cinco primeras sesiones de la tercera edición del curso-taller. Durante estas cinco primeras sesiones, de acuerdo con nuestro modelo particular de los organizadores, trabajamos sobre la EC y los SR de la función cuadrática, apoyados por la CG TI-83.

Para realizar el análisis y evaluación de la implementación consideramos de manera explícita y como referencia las cuatro cuestiones principales del estudio, y las dimensiones e indicadores de análisis y evaluación del programa. Teniendo en cuenta esto consideramos una programación de las actividades a realizar en cada sesión o parte (conjunto de sesiones) del programa, sobre los distintos tipos de contenidos (matemáticos, tecnológicos y didácticos), su secuenciación y temporalización.

4.7.1. Programación general de actividades para la primera parte del programa

En términos generales, la programación de actividades, contenidos y temporalización de la primera parte del programa corresponden con lo planificado y propuesto en los guiones de las cinco primeras sesiones del curso-taller. A la vez y tal como lo hemos dicho, están explícita o implícitamente relacionados con las cuatro cuestiones principales de nuestro estudio, esto es, con la EC, los SR, las CG y la FD. A continuación presentamos los enunciados descriptivos de las principales actividades u objetivos (**O**) de trabajo previstos para la primera (**I**) parte del programa (tercera generación):

O.I.1. Presentación general del curso, presentación de cada una de las cinco primeras sesiones, formalización de los acuerdos y compromisos, y entrega y descripción de los guiones con la programación correspondiente.

O.I.2. Recogida de las primeras fuentes de datos e información: Presentación y discusión sobre la multitarea inicial. Aplicación inicial de la encuesta (escala) de actitudes.

O.I.3. Primera toma de contacto y familiarización con la CG TI-83: Realización de las primeras actividades con la TI-83 con el propósito de familiarizares con los principales comandos, teclas y menús y con el funcionamiento y manejo básico de la calculadora.

O.I.4. Actividades de familiarización y de trabajo autónomo con el manual de usuarios de la calculadora.

O.I.5. Desarrollo de actividades (sobre funciones y resolución de ecuaciones y problemas) y reflexión conjunta para la toma de conciencia acerca de las distintas utilidades técnicas de la calculadora como utilidades y recursos con perspectivas curriculares y didácticas. La noción de **utilidades didácticas** de las NTR en general y de las CG en particular, equipadas con tecnología para la representación múltiple y manipulación simbólica (SCS) (como base para la caracterización de las modernas CG como elemento organizador del currículo).

O.I.6. Debate, reflexión y evaluación conjunta al final de esta primera parte del curso-taller sobre el contenido y las actividades desarrolladas, sobre la metodología, materiales y tecnologías utilizadas durante las cinco primeras sesiones. Para este debate y evaluación, también tendremos en cuenta, como guía, las tres preguntas claves y sus respectivas justificaciones formuladas al final de cada sesión, a saber: ¿Qué hemos aprendido sobre las funciones, la tecnología y la enseñanza o didáctica de estos conocimientos matemáticos, con los enfoques metodológicos y recursos propuestos durante estas cinco sesiones del curso-taller? Propuestas de cambio y mejora por parte de los alumnos y demás agentes o participantes, sobre los distintos aspectos anteriores, o sobre la temporalización, el ritmo, los contenidos y la metodología.

4.7.2. Contenido matemático y actividades previstas

En este estudio consideramos el contenido matemático desde una perspectiva sistémica, es decir, organizados en sistemas estructurales de conocimientos (**EC**)

–conceptuales, procedimentales y actitudinales– y presentados mediante diferentes sistemas de representación (**SR**), relacionados entre sí en función de algún tipo de problema o situación de interés, y por determinadas decisiones o intenciones curriculares y didácticas. De tal forma que, aunque los conocimientos matemáticos específicos del programa correspondan con el sistema conceptual relativo a la función, el trinomio y la ecuación de segundo grado, pueden existir algunos otros temas o conocimientos, que están explícita o implícitamente relacionados con estos y que, inclusive, pueden ser fundamentales para su estudio, pongamos por caso, vía el uso de tecnologías, o bien en el contexto de alguna actividad que resulte especialmente interesante.

A continuación presentamos los principales elementos y propiedades del contenido matemático específico, planificado y programado para ser desarrollado durante las cinco primeras sesiones (primera parte de la tercera edición del programa). La consideración de la estructura conceptual (**EC**) y de los sistemas de representación (**SR**) asociados es una constante en todo el desarrollo del programa. También, indicamos las principales actividades didácticas (problemas, ejercicios, talleres) propuestas para trabajar sobre cada uno de estos temas. La expresión **CM.I.*n*.** hace referencia al contenido matemático (**CM**), correspondiente a la primera (**I**) parte del programa.

CM.I.1. Calculo numérico aproximado (aproximaciones) utilizando CG: Actividad A.I.1. de la primera sesión.

CM.I.2. Geometría de la pantalla de la CG: Actividad A.I.2.

CM.I.3. Resolución de ecuaciones e inecuaciones utilizando una tecnología (como la TI-83) con SR múltiple y SCS integrados: Actividades A.I.3., A.III.1., A.III.2., A.III.3., A.IV.1.

CM.I.4. Primera aproximación a la resolución de problemas utilizando tecnologías con SR múltiple y SCS integrados: Actividades de secciones I.5.1., I.5.2., I.6.1.; Taller # 1 y las actividades A.I.7., A.I.8. y A.I.9.

CM.I.5. Estudio global de funciones: gráficas completas, diseños, configuraciones y patrones de gráficas de funciones: Actividades A.II.2. a A.II.7.

CM.I.6. Sistema de coordenadas paramétricas, transformaciones geométricas y funciones cuadráticas: Actividades A.II.8. a A.II.10.

CM.I.7. Resolución numérica, gráfica y algebraica de problemas y modelización de funciones en general y funciones y ecuaciones cuadráticas en particular: Actividades A.III.1. a A.III.12. y A.IV.7.

CM.I.8. Estudio de funciones racionales en general y de funciones racionales cuadráticas en particular. Introducción gráfica y numérica al concepto de límite y procedimientos asociados: Taller T.IV.2. y actividades A.IV.4., A.IV.5. y A.IV.6.

CM.I.9. Introducción a distintos métodos de aproximaciones sucesivas: Sección IV.4. y actividades A.IV.8. a A.IV.10.

4.7.3. Conocimientos tecnológicos previstos

Los conocimientos tecnológicos (**CT**) planificados y previstos para ser trabajados o desarrollados durante la primera (**I**) parte del programa, también los concebimos desde la triple perspectiva conceptual, procedimental y actitudinal. En este trabajo y en esta etapa nos limitamos a considerar como conocimientos tecnológicos conceptuales los relativos al conocimiento de las distintas utilidades tecnológicas y didácticas de la CG TI-83 y sus respectivos accesorios; como conocimiento tecnológico procedimental el dominio o habilidad en el manejo y utilización de la CG y sus respectivos accesorios; y como conocimiento actitudinal las actitudes o predisposición (favorable o desfavorable) hacia la integración y utilización de la CG en el currículo y en el aula de matemáticas de Enseñanza Secundaria. Los **CT** que consideramos para la primera (**I**) parte del programa en su tercera edición fueron los siguientes:

CT.I.1. Principales características del diseño tecnológico y de los accesorios y periféricos de la CG TI-83 en relación con la enseñanza de los distintos conceptos y procedimientos relativos al CM: Secciones I.2, I.3

CT.I.2. Principales comandos e instrucciones para la configuración inicial y previa a una actividad y puesta punto de la TI-83: Secciones I.2.2, I.2.3, I.2.4.

CT.I.3. Comandos, menús y otras utilidades de la TI-83 para la representación múltiple, edición, visualización, modelización y exploración de expresiones algebraicas, relaciones, funciones y problemas: Secciones I.2.5, I.5, I.6, II.2, II.3; III.1; taller T.III.2.

CT.I.4. Ventanas de edición y de visualización de la TI-83. Variables de la ventana de visualización gráfica: Sección I.5.1, III.2; actividad A.III.1.

CT.I.5. Utilidades del SCS y "funciones avanzadas" de la TI-83: Sección II.1.; actividades A.II.1., A.II.8., A.II.9.

CT.I.6. El manual de usuario de la TI-83. Características y familiarización con su uso: Sección I.3.

4.7.4. Formación didáctica prevista

Los conocimientos didácticos (**CD**) bases de la formación didáctica (**FD**), no sólo tienen un carácter teórico-práctico, sino que son relativos y contextualizados. En nuestro caso, esta **FD** es relativa a la estructura conceptual (**EC**) objeto de estudio y a una modalidad de enseñanza basada en puntos de vistas constructivista, en la pluralidad de los **SR** convencionales y en la integración de los recursos tecnológicos (**CG**) en el currículo y en el aula. Además, está contextualizado en un marco curricular institucional determinado (Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática. Teniendo en cuenta estas limitaciones, por ejemplo, dificultad e imposibilidad de disociación, las cuestiones y aspectos relativos a la **FD** considerados en la primera (**I**) parte del programa fueron los siguientes:

FD.I.1. Revisión y consideración del CM específico –función, trinomio y ecuación de segundo grado- con prospectiva escolar, para ser enseñado a estudiantes de segundo Ciclo de ESO (14-16 años): Tarea inicial.

FD.I.2. Selección de las nociones y procedimientos más importantes para ser enseñados a estos estudiantes: Tarea inicial

FD.I.3. Selección de las nociones y procedimientos más difíciles de enseñar o aprender por parte de estos estudiantes: Tarea inicial, tareas intermedias, reflexiones conjuntas y debates finales.

FD.I.4. Diseño o elección de una secuencia de actividades para introducir, motivar y enseñar alguno de los temas elegidos anteriormente (en CD.I.2. y CD.I.3., respectivamente): Tarea inicial y tareas intermedias.

FD.I.5. Redacción de una prueba de evaluación sobre los temas anteriores o sobre todo el CM: Tarea inicial.

FD.I.6. Intervenciones y producciones con contenido didáctico durante las reflexiones conjuntas, debates y puestas en común a lo largo de cada una de las cinco primeras sesiones: Por ejemplo, los epígrafes o secciones I.1. y I.7. de la primera sesión.

FD.I.7. Respuestas e intervenciones durante las reflexiones y debates en torno a la tres preguntas claves que las motivan: ¿Qué hemos aprendido en relación con el CM? ¿Que hemos aprendido en relación con la tecnología? ¿Qué hemos aprendido desde un punto de vista didáctico y en relación con las dos preguntas anteriores?: Debates finales y puesta en común al finalizar cada una de las sesiones.

FD.I.8. Propuestas de integración y uso de la tecnología (CG) y de sus respectivas utilidades en el currículo y en el aula de matemáticas (unidades didácticas): Tarea inicial, tareas intermedias e intervenciones en las reflexiones, debates y puestas en común durante cada una de las cinco primeras sesiones. Por ejemplo, las secciones I.4.2., I.5., I.6., I.7., y las actividades A.I.4., A.I.5. y A.I.6.

FD.I.9. Uso de la tecnología (CG) como medios de representación múltiple, visualización, modelización, simulación, cálculo y manipulación simbólica y exploración NGA de conceptos, procedimientos, situaciones y problemas matemáticos. Secciones I.5, I.6, II.2; III sesión.

4.8. BALANCE GENERAL DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA PRIMERA PARTE DEL PROGRAMA

El principal objetivo del análisis de la implementación es conocer el grado de adecuación de esta implementación con lo planificado. Es decir, sacar conclusiones acerca de si el programa ha sido implementado correctamente; y si ha resultado adecuado. Para llevar a cabo este balance confrontaremos los principales aspectos de la planificación de la primera parte del programa, que acabamos de presentar en el apartado anterior, con lo realizado durante las cinco primeras sesiones del curso-taller, para lo cual tomaremos como referencia principal las transcripciones de los vídeos correspondientes a dichas sesiones (véase Anexo 7) y las transcripciones de los casetes de audio correspondientes a las reuniones de evaluación realizadas por los miembros del equipo de investigadores durante esas fechas (véase Anexo 8).

4.8.1. Balance sobre las actividades programadas y objetivos de trabajo

Extensivamente y en la práctica, durante el desarrollo de este primera etapa del programa, se consideraron los seis objetivos de trabajo (O.I.1. a O.I.6) previstos. Sin embargo, en intensidad, los objetivos tercero (O.I.3.), quinto (O.I.5.) y sexto (O.I.6.) no se trabajaron de manera completamente satisfactoria.

Durante el tratamiento de los objetivos de trabajo tercero (O.I.3) y quinto (O.I.5), relacionados, respectivamente, tanto con la primera toma de contacto y la familiarización con los principales comandos para el funcionamiento, manejo básico y puesta a punto de la calculadora, así como con la introducción al estudio de funciones y resolución de ecuaciones y problemas, los alumnos presentaron muchas dificultades con el manejo de la calculadora e invirtieron más tiempo de lo previsto. Más adelante, cuando nos refiramos al conocimiento y dominio tecnológico explicaremos las causas de esto más en detalle. Y con respecto al sexto objetivo (O.I.6), hay que decir que, si bien hubo una extensa sesión de debate y puesta en común (véase momento M.I.11 del episodio de debate E.I.2, Anexo 7)[1] con una duración de casi 30 minutos, los temas del debate no estuvieron centrados exclusivamente en las tres preguntas claves; entre otras razones, porque, varios estudiantes seguían enganchados trabajando con las calculadoras; y, en general, durante sus intervenciones, se mostraron interesados en

[1] En adelante las notaciones del tipo M.I.11 o M.II.5 se refieren al momento 11 o 5 de la primera (I) o segunda (II) sesión del curso-taller, respectivamente. Y las notaciones del tipo E.I.2 o E.II.1 se refieren al episodio 2 o 1 de la primera (I) o segunda (II) sesión, respectivamente. Estos momento y episodios se encuentran en las transcripciones de los vídeos correspondientes a la respectiva sesión (I, II, III, etc.) del curso-taller. Véase Anexo 7.

otros temas y contenidos matemáticos relacionados con el manejo de las calculadoras y con sus consecuencias en la gestión de la clase y las dificultades que le supondrían a los alumnos de Secundaria.

Creemos que este desajuste, con respecto a los objetivos y el ritmo de trabajo, se puede haber debido al impacto (desconcertante a veces) que provoca este tipo de tecnologías cuando se enfrenta uno con ellas por primera vez. En la encuesta que hicimos al comienzo de la sesión, todos manifestaron no conocer ni haber tenido nunca ninguna experiencia con este tipo de calculadoras. Por otra parte, probablemente la manera como provocamos los primeros contactos con la calculadora no haya sido la más adecuada y esto puede haber contribuido a la situación de desconcierto. Contrario a lo que hicimos en las experiencias anteriores, en los estudios pilotos previos, las primeras explicaciones se hicieron, por una parte, demasiado rápidamente; en más o menos 6 minutos aproximadamente (véase momento M.I.3, episodio E.I.1, Anexo 7). Por otra parte, los alumnos prácticamente no trabajaron con sus calculadoras, sino que observaron la demostración que el profesor les hizo en la pantalla del aula utilizando su propia calculadora. El análisis y los resultados favorables de los primeros momentos de los estudios previos, nos hicieron creer que se podía prescindir de las explicaciones detalladas y durante un mayor tiempo para las primeras actividades de familiarización y motivación con la tecnología.

Una tecnología como la que hemos usado se aprende a manejar utilizándola, y como conclusión, hemos de reconocer que los primeros contactos deben ser semidirigidos, dejando inicialmente suficiente tiempo a los alumnos para que libremente se vayan familiarizando con el recurso, pierdan el miedo a cometer errores y empiecen a obtener sus primeros éxitos en su manejo y utilización. Todo ello, evidentemente requiere de unos tiempos y ritmos que superan las presiones y limitaciones temporales de un curso como el que hemos impartido.

Un hecho curioso, interesante y que conviene mencionar es que varios de estos estudiantes para profesores asumieron que si las tecnologías les resultaron difíciles a ellos, también lo tendrán que ser para los estudiantes de Secundaria. Por ejemplo, Rosario, en su primera reacción, que es a la vez la primera en intervenir en el episodio de debate de la primera sesión (véase momento M.I.11 del episodio de debate E.I.2:), dice que, "*con respecto al tiempo, veo que para enseñar esto así a los niños se necesita un montón de tiempo. Vamos, que si el profesor lo explica como vosotros habéis gestionado las cosas* (señala hacia la pantalla) *tardaría mucho tiempo*. Yo *creo que, cambiar el curriculum sería supremamente necesario para poder dedicarle más horas a esto* (señala la calculadora). *Porque, dentro de la asignatura de matemáticas me parece un poco imposible que los niños aprendan esto* (vuelve a señalar la calculadora). A continuación, Roberto agrega al respecto lo siguiente: "*Hombre, si a los niños se lo explicamos así* (señala hacia la pantalla donde hay proyectadas algunas gráficas de funciones)*, vale. Pero, darle la calculadora, sería liarlos más, y ya yo creo que ni función ni nada"* (Risas de aprobación de algunos compañeros).

En relación con la **temporalización**, tal como lo hemos insinuado en los párrafos anteriores, hubo cierto desajuste. Por ejemplo, obsérvese que el tema inicial previsto para la segunda sesión se empieza a tratar media hora después de iniciada esta la sesión (véase el cuarto momento M.II.04. de la segunda sesión). Básicamente hubo dos tipos de causas que generaron este desajuste temporal. La primera, tuvo que ver con los imprevistos que inicialmente suelen presentar las tecnologías, tales como, los accesorios de la calculadora, conexiones, dispositivos de retroproyección (*ViewScreem*), cámaras de vídeo, etc., despiste inicial con respecto a la información y directrices del curso-taller y con respecto a la reorganización espontánea del aula por parte de los alumnos.

Y la segunda, tiene que ver con las numerosas dificultades y atascos iniciales que tuvieron los alumnos con las calculadoras (véanse los comentarios del episodio E.I.1: momentos M.I.03 y M-I-04. de la primera sesión, Anexo 7). Al final, nos excedimos 15 minutos del horario convenido (3 horas) y no alcanzamos a trabajar las actividades correspondientes a la sección I.6 sobre "las utilidades didácticas de las CG para la representación múltiple, la visualización y simulación de situaciones-problemas", contenido que debió posponerse a la sesión posterior (véase el inicio de la segunda sesión: momentos M.II.O1 a M.II.04.).

4.8.2. Balance sobre el contenido matemático y actividades previstas

Por las causas anteriormente mencionadas, lo mismo que ocurrió en relación con los objetivos de trabajo y la temporalización, ocurrió también con las actividades programadas para desarrollar los contenidos matemáticos previstos para las cinco primeras sesiones del curso-taller (primera parte del programa). Al comprobar que no nos iba a alcanzar el tiempo para trabajar todas las actividades propuestas en el guión, sobre la marcha, decidimos integrar las ideas, especialmente las que eran comunes en las actividades de las secciones quinta (I.5) y sexta (I.6). Obsérvese que ambas tienen que ver con el empleo de los sistemas de representación (SR) múltiple y el sistema de cálculo simbólico de la calculadora empleada (TI-83), considerados como utilidades didácticas, es decir, como recursos para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos, que en este caso se refieren a las ecuaciones y la resolución de problemas sobre la función, el trinomio y la ecuación de segundo grado (véase CM.I.3 y CM.I.4, en sección anterior).

Como consecuencias de las dificultades (imprevistas) que tuvieron los estudiantes durante las dos primeras sesiones en relación con las primeras actividades de familiarización y dominio de la tecnología, algunas actividades relacionadas con el contenido matemático de la primera parte también tuvieron que ser modificadas. De todas maneras, aunque no se esperaba que los estudiantes tuvieran este tipo de dificultades con la tecnología, pues en ninguna otra de las generaciones y experiencias se nos había presentado esta situación, el tipo de diseño, planificación y metodología del curso-taller, contribuyó a que esto no constituyera un gran problema para el equipo de profesores e investigadores en relación con lo teóricamente programado. De todas maneras, después de realizar estos análisis y balance evaluativo sobre la implementación de la primera parte del programa, consideramos que en relación con el sistema de objetivos de trabajo y contenidos matemático, tecnológico y didáctico, el tiempo mínimo ideal para desarrollar las actividades y contenidos programados debería ser de entre seis y siete sesiones de tres horas cada una, máxime, teniendo en cuenta que en la planificación de la primera parte hemos considerado objetivos, contenidos y actividades básicos y mínimos.

Sin embargo, tal como lo insinuamos anteriormente, el tipo de diseño metodológico y sistémico del curso, basado en la integración estructural de contenidos organizadores a través de un modelo local, y el enfoque didáctico constructivista, en espiral y evaluativo que adoptamos, nos permitió al equipo investigador efectuar modificaciones oportunas sobre la marcha. En lugar de suprimir algún tipo de contenido, decidimos simplificar algunos de estos con miras a que de todas maneras se retomarían en la segunda parte del programa. La simplificación consistió en particularizar aun más los contenidos propuestos al tipo de tecnología empleada en la primera parte (la CG TI-83). La estrategia inicial y prevista consistía en presentar algunos temas de manera general con respecto a las tecnología; de acuerdo con esto en algunos momentos hablábamos de nuevas tecnología de representación (NTR) en general y no siempre específicamente sobre la CG TI-83. Las actividades que sometimos a este tratamiento de simplificación, las cuales volveríamos a retomar más adelante en la segunda parte del programa al trabajar con la nueva calculadora TI-92, fueron las siguientes: CM-I.3, CM-I.4, CM-I.6, CM-I.8, y CM-I.9. La valoración que hicieron los estudiantes sobre el tiempo dedicado al contenido matemático fué de suficiente en un 60%.

4.8.3. Balance sobre el conocimiento y dominio tecnológico

Como consecuencia de las modificaciones (simplificaciones) que hicimos sobre el contenido matemático y por el carácter sistémico del diseño del curso, el hecho de particularizar el contenido tecnológico (CT) de forma específica a las CG TI-83, nos permitió cubrir todos los temas -conceptos, procedimientos y actitudes- previstos sobre este tipo de contenido. La valoración de los alumnos sobre el tiempo previsto para trabajar sobre la CG TI-83 fue de suficiente en un 80%. Sin embargo, tal y como lo hemos dicho anteriormente, los estudiantes mostraron muchas dificultades en el dominio y comprensión, incluso de algunas ideas básicas, sobre el manejo de las calculadoras. Esto nos sorprendió mucho, porque en los estudios pilotos no se había presentado. Normalmente, alumnos con el mismo perfil que estos, no presentan mayores dificultades de comprensión de las ideas básicas para el manejo de este tipo de calculadora. Tal vez, esto puede deberse a la poca información que sobre este tipo de tecnología manifestaron tener estos alumnos, pues todos reconocieron que no la conocían; y también podría deberse a la manera inapropiada de abordar por parte nuestra las primeras actividades de toma de contacto y configuración inicial de las calculadoras. En lugar de permitir, como en otras ocasiones, que ellos mismos fueran descubriendo las instrucciones básicas, lo que hicimos fue mostrarles cómo se hacen las cosas en la pantalla del aula. Aparte de esto, la sección transcurrió muy aprisa y no se les dejaba tiempo para que ellos también lo fueran haciendo y asimilando su propia experiencia.

Incluso, en actividades iniciales que se tenía previsto realizar mediante trabajos individuales, como las actividades de iniciación al trabajo con el manual de usuarios (sección I.3.2 y actividad A.I.3 del guión de la primera sesión) o por lectura directa de las instrucciones paso a paso dadas en el guión de cada sesión, como, por ejemplo, la actividad A.I.2 sobre "geometría de la pantalla", en la que se propone considerar la pantalla de la CG como una modelización o simulación del plano euclidiano. En todas la actividades asociadas con ésta, se impuso un ritmo muy directivo, en el que el profesor del curso tomó el control casi absoluto, resolviendo en la pantalla del aula y dando explicaciones sin parar. Todo esto, en muy poco tiempo, o quizás, cuidando de no invertir más tiempo del que se tenía previsto. El desarrollo de las dos primeras sesiones contienen muchos ejemplos que nos permiten ilustrar estos hechos. Véanse las transcripciones de los vídeos correspondientes a estas dos primeras sesiones en el Anexo 7.

Otro factor detectado que afecta o condiciona seriamente y de distintas maneras a la implantación de una innovación curricular sobre nuevas tecnología como la que nos ocupa son las concepciones, creencias y actitudes que los agentes del programa tengan sobre las tecnologías, como sobre el contenido matemático y sobre su enseñanza. Aunque en el capítulo siguiente nos vamos a ocupar de un modo más específico sobre el análisis y evaluación de los aspectos subjetivos del programa, consideramos importante señalar que la toma de contacto, familiarización, dominio y comprensión estructurada en un curso de estos contenidos matemáticos y didácticos mediados por la tecnología constituyen una clave importante para superar los obstáculos y resistencias que lleva asociado el proceso de implementación de un programa de formación en una situación normal de aula, ya sea con estudiantes para profesores como con alumnos de Secundaria. Por eso consideramos fundamental atender los aspectos actitudinales sobre la tecnología de manera integrada con los demás contenidos desde el mismo comienzo del curso, porque en general estos conocimientos –conceptuales, procedimentales y actitudes- sobre la tecnología y su evolución están estrechamente relacionados con el trabajo efectivo sobre los demás tipos de contenidos y actividades.

El análisis de estas cuestiones sobre la tecnología utilizada en la primera parte de programa nos sirvieron para replantear las cuestiones relacionadas con el otro modelo (más potente) utilizado en la segunda parte, para la cual tomamos la decisión de presentar la nueva tecnología a partir de los elementos comunes con la anterior haciendo la metáfora inclusiva TI-83⊂TI-92. Estos análisis y decisiones de modificación fueron posibles por el diseño metodológico y el carácter evaluativo continuo e integral del curso.

4.8.4. Balance en relación con la formación didáctica

En este estudio nos interesa el conocimiento didáctico (CD) y la formación didáctica (FD) en relación directa con el contenido matemático específico, los SR y la CG con la cual hemos trabajado. Si revisamos el contenido general referido al CD y la FD previsto para la primera parte del programa (véase listado de contenidos FD-I.1 a FD-I.9), observamos que todos están referidos más a los indicadores y dimensiones de evaluación subjetiva del programa que a las objetivas. Como los análisis y evaluación de los aspectos subjetivos se realizarán con mayor detalle en el próximo capítulo, en esta sección sólo nos referiremos a los aspectos relacionados con la FD en términos generales.

Empecemos por señalar al respecto que todos los estudiantes en las primeras sesiones del curso-taller pusieron de manifiesto de diferentes maneras y en diferentes momentos que tenían una concepción formalista y academicista tradicional, tanto sobre la naturaleza de del conocimiento matemático en cuestión, como sobre su enseñanza. A pesar de que en el enunciado de la multitarea inicial se les insinuaba con la propia organización y presentación de esta que debían tener en cuenta y distinguir diferentes aspectos didácticos o escolares sobre el contenido, la instrucción y el análisis cognitivo de dificultades y errores (véanse ítems FD-I.1 a FD-I.5), los estudiantes, aunque organizaron sus tareas de acuerdo con la secuencia de actividades que les propusimos, en realidad formularon sus propuestas sin consultar en su esencia los contenidos de esta secuencia de actividades. Todos los estudiantes, sin excepción, proponen introducir, motivar y desarrollar el tópico elegido a partir de un problema típico (en sentido academicista) que le de entrada al *método tradicional de transmisión de conocimientos* (véanse multitareas iniciales en el Anexo 4). Este método tradicional de transmisión o "ligado a una pedagogía expositiva que da informaciones completas" (Jurado y Flores, 1997, p. 15) concibe el conocimiento matemático "como un producto ya elaborado que debe ser trasladado al estudiante mediante un discurso para que cure su ignorancia" (Moreno, 1997, p. 104).Los alumnos para profesor participantes del programa de formación consideraron en sus multitareas iniciales como tema o temas más importantes para ser enseñados el mismo o los mismos que consideraron como más difíciles de enseñar o aprender por parte de los estudiantes de secundaria. Además, ninguno propone estrategias o actividades para abordar e intentar superar estas dificultades. Solamente indican cuál o cuales temas son los más difíciles o causas de errores frecuentes, proponen unas actividades para introducir, motivar y desarrollar el contenido general, centradas principalmente en una concepción epistemológica formalista basada en un híbrido de lenguaje natural técnico y simbólico algebraico y, al final proponen una prueba de evaluación en la que se incluyen preguntas o problemas relacionados con todos los temas del contenido matemático, incluyendo algún ítem relativo al tópico que han considerado como más difícil de enseñar o aprender.

Esta manera de concebir la enseñanza del contenido matemático riñe con las perspectivas didácticas constructivistas en la que, por ejemplo, las dificultades y errores son considerados como algo normal e importante en el proceso de construcción de los conocimientos y no sólo como indicador de que el estudiante no ha comprendido bien, que es como los alumnos del curso lo interpretan. Estos alumnos reflejan muy poco, tanto los fundamentos curriculares y de Didáctica de la Matemática que han recibido durante por lo menos los dos cuatrimestres que llevan ya participando en los cursos de

Didáctica de la Matemática en su Plan de Estudio. Por ejemplo, solamente una alumna (Irene) organiza los contenidos matemáticos a enseñar de acuerdo con las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal del conocimiento, aunque luego las actividades de introducción y desarrollo de los temas no reflejan esta organización cognitiva del conocimiento, ni ningún otro elemento organizador del currículo, al menos no explícitamente.

Así las cosas, con este panorama o perfil inicial de los estudiantes sobre sus conocimientos didácticos base de su formación didáctica, el trabajo durante estas primeras sesiones del curso-taller tuvo que desarrollarse a un ritmo más lento del que teníamos previsto. Porque, por una parte, ellos no mostraban que estaban accediendo efectivamente a los distintos elementos del modelo local-triádico de los organizadores de una forma integrada y sistémica como era deseable. Y, por otra parte, sus maneras evidentes de concebir la naturaleza del conocimiento matemático que nos ocupaba y su enseñanza, dificultaba aun más la incorporación de la tecnología al sistema del modelo local, o sea, como otro elemento y contenido organizador. De tal manera que tendían a acceder a cada elemento organizador de una manera aislada y adaptándola a sus maneras tradicionales o clásicas de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza. Este hecho se complicaba aun más en aquellos casos de los estudiantes que mantenían una predisposición actitudinal desfavorable, crítica y poco abierta en relación con la tecnología como recurso o utilidad didáctica, aun y a pesar de mostrar todos un gran interés por la tecnología pero sólo como un simple recurso innovador para uso personal como estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas. Algunos alumnos opinaron, a raíz de las dificultades que tuvieron inicialmente con la calculadora TI-83, que si ellos, a pesar de estar interesados y dominar el contenido matemático tuvieron dificultades, "¿cómo sería con los niños de ESO?" que seguramente ni les interesaba este tipo de calculadora, ni sabían manejarla, ni sabían nada de matemáticas. Así "no aprenderían ni una cosa ni la otra" (Roberto, Debate de la primera sesión).

En general, en sus diversa intervenciones, la mayoría de los estudiantes reflejaron sus propias predisposiciones actitudinales desfavorables hacia la incorporación de las CG en el currículo y la enseñanza de las matemáticas. Veamos algunos ejemplos de las intervenciones de los alumnos, con respecto a la enseñanza del contenido matemático y en general de las matemáticas utilizando las calculadoras graficadoras, que sustentan lo que hemos dicho anteriormente (episodio de debate E.I.2.):

Al revisar, por ejemplo las transcripciones de los vídeos correspondientes a las primeras sesiones del curso-taller (véase Anexo 7), observamos que en la casi totalidad de intervenciones verbales de los alumnos, ponen de manifiesto, a veces de una manera ingenua, sus preocupaciones y dudas sobre la enseñanza de determinados conceptos relacionados con el contenido matemático del curso a "niños" de Educación Secundaria empleando una CG como la TI-83. Veamos algunos ejemplos de intervenciones de los alumnos que nos permiten documentar las anteriores afirmaciones. Todas esta intervenciones han sido tomadas del segundo episodio de debate (E-I.2) correspondiente a la primera (I) sesión (véase Anexo 7). A la vez, estas intervenciones reflejan las opiniones (actitudes) que estos alumnos tenían inicialmente con respecto a la introducción de las CG en el currículo de matemáticas de educación secundaria.

Rosario: - "...yo creo que cambiar el curriculum sería supremamente necesario para poder dedicarle más horas a esto" (señala la calculadora) (Rosario, E.I.2.-M.I.11).

Roberto: - "Si, si, porque es que ya los niños tienen dos cosas en la mente: la calculadora que es una cosa nueva que necesita su tiempo y el concepto de función. Sí que se requiere mucho tiempo, porque, si nos damos cuenta, lo que estamos haciendo es introducirles dos conocimientos nuevos: siguiendo con el plan de matemática del curso normal y metiéndole un instrumento que no es que sea sencillo, que tiene su complejidad" (Roberto, E.I.2.-M.I.11).

Juan: - "Un aspecto positivo que yo le veo a esto es que, a lo mejor al comienzo pierdes un poco de tiempo pero ganas en relación con los alumnos, porque estos tienen que estar constantemente preguntando, se equivocan, y ¿esto como es?, vuelven a preguntar, cosa que hasta ahora en una clase normal, ¡vamos!, no hay nada de esto, porque, el profesor da una cosa, nadie se entera y nadie pregunta. Y aquí, si no te enteras tienes que preguntar porque, si no, no puedes seguir trabajando" (Juan, E.I.2.-M.I.11).

Antonio: - "Pero, también, tienes que tener en cuenta que tu ya tienes algún manejo de la calculadora. Pero un niño que hasta ahora no la haya manejado nunca; el problema es muy similar al del ordenador. Un niño, prácticamente la matemática no la ha utilizado, si tu no has tenido calculadora, tienes la matemática; pero, el niño que no tiene nada, creo que tiene que recurrir más al profesor" (Antonio, E.I.2.-M.I.11).

Juan: - "También, hay que tener en cuenta quién necesita más ayuda o menos ayuda. El que se desenvuelve mejor con esta máquina, y el que no, no da una. En ese aspecto tiene que dejarla de lado" (Juan, E.I.2.-M.I.11).

Roberto: - "...Luego, habría que ver lo que hace un profesor en el aula, a lo mejor con 30 alumnos. Aquí, José está pasando, también está Evelio, pero, ¿si fuera sólo un profesor con 30 alumnos, que no fuéramos nosotros que podemos tener más interés? 30 alumnos, con un solo profesor, pueden pasar muchísima cosas" (Roberto, E.I.2.-M.I.11).

Juan: - "Pero el interés también crece al ver que lo que estas haciendo, por ejemplo, lo que pasa en la gráfica lo puedes ir modificando. En una pizarra normal para ver 20 gráficas diferentes es muy latoso. Si embargo, aquí simplemente con un cambio de parámetro vas haciendo gráficas, cambiando unas cosas, ves que si cambias el signo negativo se invierte la función; entonces, el niño cuando va haciendo eso, se mete y se mete y eso es muy motivador" (Juan, E.I.2.-M.I.11).

Roberto: - "En cuanto le digas al niño que hoy vamos a ver el tema con esto, con calculadora, esto ya es muy motivador" (Roberto, E.I.2.-M.I.11).

Isaías: - "...Lo primero que hay que tomar conciencia es que la calculadora es una herramienta, no un juego. No que el día que toca la calculadora al niño le parecerá muy bien, muy divertido" (Isaías, E.I.2.-M.I.11).

Roberto: - "Hombre pero la matemática tenemos que intentar hacerla un poco más agradable" (Roberto, E.I.2.-M.I.11).

Isaías: - "Si. Vamos a hacer la matemática todo lo agradable que se pueda. Pero, lo que no debemos consentir es que se piense que el día de la calculadora es el día de fiesta" (Isaías, E.I.2.-M.I.11).

Roberto: - "Si tú a un niño le vas diciendo todo en la pizarra, la pizarra, la pizarra y le dices, venga, hoy con esto (levanta una calculadora) vamos a jugar, vamos a introducir una cosa diferente que va a cambiar el ambiente de una asignatura que es la matemática. Porque, el ambiente de matemática es, ¡madre mía!, llegó el momento de la matemática, ¡yo qué sé!" (Roberto, E.I.2.-M.I.11).

4.8.5. Conclusiones generales sobre la implementación de la I parte del programa

Basándonos en la revisión de la implementación y en la información sobre la primera parte del programa (fases F-I y F-E1), confrontando lo planificado con lo efectivamente realizado (transcripciones de vídeos, producciones de los alumnos y observaciones de los investigadores y observadores), en su momento, tomamos las decisiones que consideramos más convenientes para reorientar y mejorar el programa en su segunda parte.

Con respecto al contenido matemático debemos decir que, a efectos de los intereses de la investigación, se debería profundizar aun más en los tres tópicos específicos de este contenido y desarrollar en detalle los diferentes componentes de su estructura conceptual (EC) atendiendo a la pluralidad de sistemas de representación (SR) usuales en el estudio de las funciones. Hemos podido apreciar que, por una parte, en la literatura al uso hay muchas facetas y aproximaciones a este mismo contenido que se pueden y deben considerar para su estudio en profundidad. Resultados de otras investigaciones, como por ejemplo, sobre los obstáculos conceptuales en el aprendizaje de las funciones en general (Sierpinska, 1992) y de las funciones cuadrática en particular (Zaslavsky, 1997). Por otra parte, consideramos que no conviene introducir otros tópicos más avanzados, tal como lo hicimos bajo el supuesto de que esto permitiría ilustrar otras posibilidades de las CG (temas de Análisis, series, funciones y gráficas de varias variables, etc.) y de paso interesar más a los estudiantes. De esta forma, lo que se consiguió fue dispersar la atención sobre los elementos principales del contenido y sobre las utilidades didácticas de la tecnología. Porque los alumnos tendieron a considerar estos temas más avanzados de mayor interés desde su propia perspectiva como estudiantes de matemáticas. De hecho, esta fue una de las críticas que algunos de ellos hicieron sobre el contenido del curso-taller. Los propios alumnos demandaron permanentemente ampliar el contenido matemático a otros temas "más difíciles e interesantes". Esto pone de manifiesto que, al menos en la primera fase del curso-taller, anteponen su interés y creencias acerca de las matemáticas sobre los problemas didácticos o educativos relacionados con cualquier contenido matemático, por elemental que este sea. Los estudiantes están más interesados en su formación como usuarios de la calculadora que en su preparación como futuros profesores. En el primer caso se preocupan por dominar competencias concretas, no así en el segundo caso.

En relación con la tecnología, hay que decir que aunque se puede trabajar con ella sobre un gran número de situaciones y temas, el modelo (TI-83) con el cual trabajamos durante esta primera parte presenta diferentes limitaciones, al menos de cara a los enfoques tradicionales o clásicos sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, como también, en comparación con otras tecnologías, como las CG TI-92, TI-89, TI-92*plus* y los actuales ordenadores (con sus correspondientes programas o software educativos), más potentes y atractivos para los estudiantes. De todas maneras, las utilidades de estas calculadoras, tales como las posibilidades de representación múltiple, de visualización numérica y gráfica, etc. se ajustan a las actividades que formulamos para la primera parte del curso-taller e incluso para algunas de la segunda parte. La CG TI-83 es una herramienta útil para el aprendizaje de las funciones por parte de los estudiantes de secundaria; esto también justifica el que la hayamos introducido como recurso tecnológico para la formación didáctica de los futuros profesores de matemáticas. Además, constituyó un buen recurso de motivación y apoyo para el conocimiento y dominio de la otra tecnología que se iba a introducir más tarde en la segunda parte del curso-taller.

Y, en relación con la temporalización, aunque el tiempo previsto fue más que suficiente para una primera introducción y familiarización con las posibilidades de la tecnología empleada, tenemos que decir que inicialmente, durante las dos primeras sesiones, el ritmo y contenidos de trabajo resultaron demasiados intenso y densos, debido a que se trataron muchos y diversos temas y actividades, en relativamente muy poco tiempo. Además, a partir de la tercera sesión, cuando los alumnos ya habían conseguido familiarizarse con la tecnología, superar la novedad y conseguir cierta autonomía sobre su dominio, empezaron a distraerse y dispersarse con demasiada frecuencia, intentando realizar actividades distintas de las propuestas, sobre otros temas matemáticos más avanzados. De todas maneras, el tiempo dedicado a cada una de las tres cuestiones que estructuran el modelo local-triádico de los organizadores estuvo bien distribuido. Las intervenciones del profesor fueron inicialmente demasiado extensas y discursivas, aunque a partir de la tercera sesión se permitió que los estudiantes trabajaran mucho más individualmente y que interactuaran entre ellos. Para una futura generación del programa, conviene fomentar aun más la participación activa de los estudiantes, y será necesario revisar las actividades porque algunas tendían a ocupar un tiempo excesivo y otras, por su contenido, desviaban la atención del contenido matemático principal.

En conclusión, inicialmente tanto el contenido matemático como el tipo de calculadora utilizada no consiguieron motivar efectivamente a los alumnos todo lo que se esperaba. Creemos que, por una parte, desde su punto de vista como estudiantes de ultimo año de matemáticas, y, por la otra, su falta de experiencia y conocimientos didácticos no les permitieron comprender el interés didáctico de la EC, los SR y las utilidades curriculares de la CG, ni acceder a la complejidad sistémica del modelo local conformado por estos elementos organizadores. Esto no quiere decir que no les haya interesado la tecnología, todo lo contrario, les interesó pero en relación con otros temas o tópicos matemáticos y para ellos mismos como estudiantes de matemáticas y no como futuros profesores.

4.8.6. Sesiones de evaluación de la primera parte del programa

El curso-taller fue planificado de tal modo que entre la primera y segunda parte hubiera una semana de receso (en este caso coincidía con la Semana Santa). Esto nos permitió a los miembros del equipo de investigadores-evaluadores analizar conjuntamente lo implementado hasta esos momentos y tomar las decisiones pertinentes y oportunas de reajuste de las cinco sesiones subsiguientes. En el Anexo 8 se presentan las transcripciones integras de las grabaciones de las reuniones de evaluación sobre la primera parte del programa realizadas por parte del equipo de investigadores durante esta semana de receso. El siguiente es un fragmento de una de estas sesiones de evaluación.

EB: - "Permítanme aclarar una cosa. La programación y selección de actividades correspondientes a cada sesión están cuidadosamente seleccionadas y rediseñadas, en base a un trabajo arduo de revisión de los cursos anteriores y de otros documentos de consulta. Además, cada día en casa, después de terminada la correspondiente sesión visualizo el vídeo respectivo con el fin de revisar y hacer las modificaciones sobre la marcha de las siguientes sesiones.

- Para hacer esta revisión, selección y rediseño de actividades para las sesiones siguientes procuro tener en cuenta los siguientes criterios: Primero, los distintos aspectos y conocimientos –conceptual, procedimental y actitudinal- relacionados con cada una de las cuatro cuestiones del estudio, esto es el CM, los SR, la CG y el CD-FI-FD. Además, también tengo en cuenta las distintas categorías de indicadores sobre el diseño de la escala de actitudes.

- Si embargo, considero que en la primera parte del curso, y especialmente durante las dos primeras sesiones, era absolutamente necesario que se le diera mucho mayor énfasis al conocimiento y dominio de la calculadora que a los otros organizadores"

LR: - "Vamos a ver Evelio. Yo creo que esas experiencias pasadas estuvieron muy bien porque han resultado ser muy útiles. Se ha visto que algunas actividades resultaron ser muy difíciles, así que en vez de ser en la primera sesión se ha pasado a la segunda.

- El balance ha sido positivo, en cuanto a la parte del contenido, la parte conceptual. El juego de los SR, aunque no los hemos mencionado explícitamente, creo que han estado bastante bien dimensionados.

- Pero, nos hemos olvidado de hacer una revisión de las funciones y comandos principales de la TI-83 que nos puede ser útil en dos sentidos: Primero, comprobar que ninguna función importante ni ningún comando significativo han sido eludidos; y, si han sido eludidos, pues no ha ocurrido nada grave porque todavía tenemos dos semanas por delante y podemos insistir en él en esta segunda parte del curso-taller. Y luego, nos permite controlar que la lógica distribución de porcentaje entre los distintos comandos, porque hay comandos que son más importantes que otros, no estuviese desequilibrada, sino que, por el contrario, todo predominio de un determinado comando estuviese justificado y poder controlar que no nos hemos dedicado exclusivamente a hacer un tipo de actividad sobre un tipo de representación.

- Yo creo que tu podrías hacer un balance sobre esto, como parte de la evaluación y hacer un informe o un inventario de un folio en forma de matriz, de comandos utilizados por sesiones, indicando las actividades en los cruces de la matriz".

EB: - "De acuerdo, además, yo creo que eso serviría también para comparar lo que hemos programado o planificado con lo que realmente se ha ejecutado, porque, p.ej., hay comandos que han surgido o se han tenido que utilizar antes de lo previsto, e inclusive hay actividades que los propios alumnos han intentado hacer y que no estaban en el guión".

LR: - "Y no te olvides de seguir poniendo primero los contenidos en el guión. Llamándole contenido también al conocimiento sobre la propia calculadora. P.ej., Introducción al Cabri o introducción a la hoja de cálculo, etc. Que, aunque no sea un contenido matemático del currículo de Secundaria, es un contenido de este curso. Los contenidos del curso están integrados y tienen que ver con las calculadoras, con el tipo de funciones y problemas que estamos estudiando y con el conocimiento o la aplicación didáctica de estas".

EB: - "Bueno, por otra parte, quiero que tengamos en cuenta que después de esta primera parte del curso los alumnos se han llevado a casas la TI-92. Recuerden que, además de la experiencia que han adquirido con la TI-83, he dicho que la TI-92 contiene de alguna manera a la TI-83; además, se han llevado también copias de los manuales. Así que, creo que durante las dos próximas sesiones podríamos ir más rápido que en las dos primeras sesiones con la TI-83, con tareas y ejercicios ligeros, de reconocimiento y familiarización con los comandos y los distintos tipos de teclas y menús. De este modo, podemos ir orientando las cosas hacia las sesiones 8ª, 9ª y 10ª, en las que tendremos actividades y tareas más creativas y difíciles.

- Para las próximas sesiones creo que debiéramos modificar y complementar significativamente tres cosas. La primera, tiene que ver con el uso simultáneo de las dos calculadoras, en por lo menos una sesión o en algunas actividades, para ver cómo se desenvuelven, que partido le sacan a la una y a la otra, y que puedan establecer comparaciones entre una tecnología y la otra. Por ejemplo, en actividades que tengan que ver con la aplicación de programas, o con las opciones o menús de estadística, o con cualquiera de las otras aplicaciones (Editor de datos, Geometría interactiva), consideradas solamente como utilidades didácticas accesorias y no como objetos de estudio, interés o trabajo centrales. Por ejemplo, la aplicación hoja de cálculo (Editor de datos) nos permiten el tratamiento de listas de datos que pueden conducir después a sus respectivos gráficos, utilizando, p.ej., la curva de regresión cuadrática para aproximar una nube de puntos".

LR: - "Pero, dinos un argumento fuerte que hiciese necesario introducir esa información. Aparte de que son utilidades que están en las calculadoras, pero que de hecho nosotros no vamos a introducirlas todas".

- Y volviendo sobre la actividad que has sugerido para retomar la TI-83, a mi me parece que se debería pensarse como una actividad complementaria para hacer en casa, porque, de algún modo parecería que se nos ha quedado algo que debimos haber hecho y no lo hicimos. Además, ya ellos tienen cierta autonomía con la TI-83, y nosotros lo que hacemos ahora es proponerles ciertas actividades para que ellos ejecuten esta autonomía. Claro que podemos hacer un balance y darles instrucciones escritas. Piensa que abrir muchos frentes distorsiona y que en cada sesión debe haber solamente un par de ideas, conceptuales o técnicas. Aunque después sean solamente cuestiones accesorias". (Fragmentos de la trascripción de una de las reuniones de evaluación de la primera parte del estudio empírico, Anexo 8).

Quizás, a esta altura de la primera parte del programa sea prematuro hacer una evaluación del modelo local de los organizadores para el currículo, pero si hay que decir que después de las cinco primeras sesiones de programa, en general, los alumnos participantes no consiguen comprender ni asumir todavía el papel de estos tres contenidos como organizadores – EC, SR, CG - ni mucho menos como sistema (modelo) útil para llevar cabo las primeras actividades de análisis didáctico que se iban proponiendo gradualmente en cada una de las sucesivas sesiones. Tengamos en cuenta que de todas maneras todos estos alumnos están cursando en estos momentos la asignatura de Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del Plan de Formación del Departamento de Didáctica de la Matemática. Esta formación no la reflejaron efectivamente en esta primera parte del programa.

4.8.7. Propuestas de cambio y mejora

Finalmente, sobre las propuestas de cambio y mejora con miras a la siguiente parte del programa (fases F-E.2. y F-F) y a una futura generación inmediata, creemos pertinente señalar y proponer lo siguiente:

- Revisar y ajustar las sesiones primera y cuarta de la primera parte del curso-taller. El contenido, la diversidad de cuestiones y el diseño de las actividades propuestas, prácticamente son desbordantes para el tiempo que le asignamos.
- Si no se incrementa el número de sesiones para la primera parte del programa, conviene establecer algunos prerrequisitos mínimos, especialmente sobre los contenidos tecnológico y didáctico. Esto se podría hacer mediante lecturas previas al curso-taller o durante su desarrollo pero como actividad a ser realizada en casa. También se podrían

introducir algunas ideas básicas y específicas en las asignaturas de Didáctica de la Matemática que se le imparte a estos estudiantes para profesor.

- La secuenciación y temporalización del contenido debe ser reorganizada en las tres primeras sesiones de la primera parte del programa. En particular, si no es posible ampliar el número de sesiones de la primera parte a seis o siete, es necesario revisar y simplificar o concretar para la tecnología utilizada en la primera parte los ítems de contenido matemático (CM) siguientes: CM-I.4, CM-I.7 y CM-I.9. Incluso este último ítem se podría suprimir, pero utilizando los aspectos relacionados con el contenido matemático general en otras actividades asociadas con el ítem CM-I.3.
- En general el tiempo fué optimo para las sesiones segunda, tercera y quinta y relativamente bajo para las otras dos sesiones (primera y cuarta). Consideramos que lo ideal sería incrementar el número de sesiones en dos más.
- Conviene fomentar más una mejor equilibrada actitud hacia las tecnologías y un mejor dominio y utilización autónoma, al menos en relación con el tipo de CG que hemos empleado.

4.9. ANÁLISIS DE LA SEGUNDA PARTE DEL PROGRAMA

La segunda parte del programa corresponde, de acuerdo con el diseño de investigación, a la subfase de ejecución (F-E.2) y la fase final (F-F); con respecto al desarrollo del curso-taller, corresponde a las seis últimas sesiones del mismo (sesiones quinta a décima). Durante estas sesiones, igual que en las cuatro primeras, continuamos trabajando sobre las cuatro cuestiones centrales del estudio -EC, SR, CG y FD-, con la diferencia de que ahora introducimos otra tecnología, la supercalculadora TI-92, con mayores y mejores posibilidades tecnológicas, matemáticas y didácticas, y, que a la postre, resultó ser más atractiva y motivadora para todos los alumnos.

A continuación, procedemos a presentar la programación general de actividades u objetivos generales de trabajo, los distintos tipos de contenidos y la temporalización correspondiente a esta segunda parte del programa (curso-taller). En general, los objetivos de trabajo y los contenidos siguen siendo los mismos que los de la primera parte. Sólo se diferencian en aspectos específicos relacionados con el cambio de momento, de tecnología y por lo tanto de organizador y de actividades que la nueva tecnología y la experiencia y conocimientos adquiridos hacen posibles.

4.9.1. Programación general de actividades para la segunda parte del programa

Tal y como lo hemos dicho, la programación general de actividades u objetivos de trabajo previstos para la segunda parte del programa son básicamente los mismos de la primera parte más otros adicionales, con las diferencias naturales derivadas del cambio de tecnología, momento, experiencia y conocimientos. Del mismo modo que para la primera parte, la programación general de actividades, los contenidos y la temporalización para la segunda parte corresponden con lo planificado en los guiones de las seis sesiones finales del curso-taller. A continuación procedemos a formular la programación general de actividades u objetivos (O) de trabajo correspondientes a la segunda (II) parte del programa:

O-II.1. Presentación general de la segunda parte del programa correspondiente a las seis sesiones finales del curso-taller (sesiones quinta a décima). Entrega y descripción de los guiones con la programación correspondiente a estas sesiones. Presentación de la supercalculadora TI-92. Consideración como recurso y contenido organizador del currículo de matemáticas de enseñanza secundaria.

O-II.2. Toma de contacto con la CG TI-92: Primeras actividades de familiarización y utilización autónoma de la TI-92 como recurso didáctico. Principales comandos, teclas y menús y manejo básico de la calculadora. Comandos especiales.

O-II.3. Actividades de familiarización y trabajo autónomo con el manual de usuarios de la TI-92.

O-II.4. Desarrollo de actividades (sobre funciones y resolución de problemas) y reflexión conjunta sobre las distintas utilidades didácticas de la TI-92.

O-II.5. Toma de contacto y familiarización inicial autónoma con la nueva tecnología (TI-92), en base a la experiencia y conocimientos ya adquiridos en las sesiones anteriores con la TI-83 y utilizando el manual de usuarios respectivo. Determinación de semejanzas, diferencias y ventajas de los dos modelos de calculadora.

O-II.6. Reflexión y reconocimiento en relación con la hipótesis: Nuevos organizadores → nuevas alternativas (significados y opciones) curriculares y didácticas para el profesor de matemáticas. Ampliación de opciones curriculares y utilidades didácticas con las posibilidades dinámicas de la supercalculadora TI-92, por ejemplo, para la simulación de fenómenos modelizables matemáticamente. Nuevas opciones de representación gráfica en ventanas de visualización divididas, múltiples y en 3D. Modelización y resolución de problemas, relativamente difíciles de resolver sin la tecnología. Conexiones entre distintos bloques de contenido de las matemáticas y con otras ciencias. Las "aplicaciones" integradas en la TI-92: El SCS (*DERIVE*), la Geometría interactiva (*Cabri-Geometry II*) y los procesadores o editores de programas, bases de datos y textos.

O.II.7. Revisión y mejora de los diferentes aspectos o ítems de la tarea inicial, tomando como fundamento las nuevas ideas y propuestas didácticas formuladas en el curso-taller sobre la relación -EC-SR-NTR-. En particular, revisión de los diagramas conceptuales, definiciones y propuestas de evaluación presentadas en la tarea inicial.

O.II.8. Discusión sobre las diferencias, ventajas e inconvenientes de los dos tratamientos o enfoques metodológicos de enseñanza del CM: el clásico (o tradicional) y el que estamos proponiendo en el curso-taller basado en la EC, la pluralidad de SR y el uso de NTR.

O.II.9. Recogida de información correspondiente a esta segunda parte y fases del programa y la investigación: Tarea final (definición de función cuadrática, mapa conceptual, actividad de motivación e introducción del tema y propuesta de evaluación); aplicación de la encuesta o escala de actitudes final; y encuesta de evaluación final del curso-taller.

O.II.10. Debate, reflexión y evaluación conjunta final del programa y del curso-taller, retomando las orientaciones e ideas discutidas y puestas en común en el debate intermedio realizado al final de la primera parte del programa (ver objetivos de trabajo O.I.5. y O.I.6., respectivamente). Propuestas de cambio y mejora para futuras generaciones o ediciones del programa.

4.9.2. Contenido matemático y actividades asociadas

El contenido matemático y las actividades asociadas para la segunda parte del programa, son complementarias en el sentido de ampliación o generalización de los de la primera parte. Conceptual y procedimentalmente no varían mucho, ya que es nuestro interés desarrollar la investigación y el programa básicamente alrededor de la misma estructura conceptual (EC) referida al mismo contenido matemático elegido inicialmente. Esto tiene que ver también con las decisiones de cambio y mejora tomadas a partir del análisis y evaluación de la implementación de la primera parte. Recordemos que el contenido matemático lo consideramos desde un punto de vista sistémico, organizados en sistemas estructurales de conocimientos (**EC**) –conceptuales, procedimentales y actitudinales– y presentados mediante múltiples sistemas de representación (**SR**). La programación relativa al contenido matemático para la segunda parte del programa es la siguiente:

CM.II.1. Resolución de ecuaciones y problemas utilizando las posibilidades de visualización gráfica, representación múltiple, simulación, modelización y el sistema de cálculo simbólico (SCS) integrado en la TI-92.

CM.II.2. Estudio general (global y local) de funciones cuadráticas y racionales cuadráticas utilizando la TI-92: gráficas completas, familias de gráficas de funciones. Introducción gráfica, numérica y simbólica del concepto de límite y procedimientos asociados. Actividades A.V.3., A.VI.5.

CM.II.3. Visualización de raíces complejas de trinomios de segundo grado: Actividad A.V.4., A.VII.1.

CM.II.4. Establecer conexiones entre diferentes bloques de contenido: Utilizar métodos geométricos, algebraicos y analíticos para resolver un mismo problema utilizando las distintas aplicaciones y opciones de la CG TI-92: Actividad A.V.5.

CM.II.5. Obtención de las fórmulas cuadráticas (canónica, del vértice y factorización) y otras manipulaciones simbólicas utilizando las diferentes opciones y utilidades del SCS de la TI-92: Actividades A.VI.2., A.VI.3.

CM.II.6. Funciones cuadráticas inversas: Actividad A.VI.4.

CM.II.7. Estudio geométrico y gráfico (introducción y transformaciones) de la función y la ecuación cuadrática y de familias de estas y de sus gráficas mediante el sistema de coordenadas paramétricas y la aplicación *Cabri* de la TI-92: Actividades A.VI.6, A.VI.7., A.VIII.3., A.IX.1., A.IX.2., A.X.1., A.X.2., A.X.3.

CM.II.8. Representación múltiple, modelización, simulación y resolución de situaciones-problema mediante las distintas utilidades tecnológicas, dinámicas y didácticas de la TI-92: Secciones VII.2. de la séptima sesión y IX.0.3 de la novena sesión; actividades A.VII.3. a A.VII.10., A.VIII.2., A.VIII.5.

4.9.3. Programación relativa al contenido tecnológico

Los conocimientos –conceptuales, procedimentales y actitudinales- sobre la tecnología programados para esta segunda parte del programa son por un lado, una adaptación natural a la nueva tecnología (TI-92) de los contenidos tecnológicos correspondiente a la calculadora utilizada en la primera parte. Por otro lado, son complementarios, tanto en el sentido de que en unos casos son generalizaciones de los anteriores y en otros son nuevos y necesarios conocimientos relacionados exclusivamente con la nueva tecnología. De la misma manera que en la sección 4.7.3. sobre el contenido tecnológico previsto para la primera parte del programa, en esta segunda parte también nos limitamos a considerar como conocimientos tecnológicos conceptuales los relativos al conocimiento de las distintas posibilidades o utilidades didácticas de la TI-92; como conocimiento tecnológico procedimental el dominio o habilidad en el manejo y utilización de la CG y sus respectivos accesorios; y como conocimiento actitudinal las actitudes o predisposición (favorable o desfavorable) hacia la integración y utilización de la CG en el currículo y en el aula de matemáticas de

Enseñanza Secundaria. Los **CT** que consideramos para la segunda (II) parte del programa fueron los siguientes:

CT-II.1. Principales características del diseño tecnológico y de los accesorios y periféricos de la CG TI-92 en relación con la enseñanza de los distintos conceptos y procedimientos relativos al contenido matemático y los SR.

CT-II.2. Principales comandos e instrucciones para la configuración inicial y previa y puesta punto de la TI-92.

CT-II.3. Comandos, menús y otras utilidades de la TI-92 para la representación múltiple, edición, visualización, simulación, modelización y exploración de expresiones algebraicas, relaciones, funciones y problemas.

CT-II.4. Ventanas de edición y de visualización de la TI-92: Variables de configuración de la ventana de visualización. Opciones de ventana o pantalla dividida (*Split Screen*) y doble pantalla o gráfica (*Two Graph*) de la TI-92 como utilidad didáctica.

CT-II.5. Utilidades del SCS y "funciones avanzadas" de la TI-92.

CT-II.6. Familiarización y utilización autónoma y adecuada de los manuales de usuarios de la TI-92.

CT-II.7. El SCS de la TI-92 y la enseñanza de las matemáticas.

CT-II.8. Las "aplicaciones" *Geometría interactiva* (*Cabri*) y *Editor de datos* (*Data/Matrix Editor*) de la TI-92 como utilidades didáctica y recursos tecnológicos para visualizar, modelizar y simular problemas, conceptos y procedimientos matemáticos escolares.

CT-II.9. La opción de programación de la TI-92 y sus posibilidades didácticas.

CT-II.10. Las posibilidades dinámicas y de simulación de la TI-92 en relación con la enseñanza del contenido matemático.

4.9.4. Formación didáctica

Los conocimientos didácticos (CD) base de la formación didáctica (FD) planificados para la segunda parte del programa coinciden con los nueve ya enunciados para la primera parte. En esta segunda parte, no incluimos nuevos enunciados sobre este tipo de conocimientos.

4.10. BALANCE GENERAL SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SEGUNDA PARTE DEL PROGRAMA

El balance general de la implementación de la segunda parte del programa (fases F-E.2 y F-F) corresponde también con la evaluación global del programa. Tal y como dijimos en el apartado 4.9, el hecho (previamente planificado) de que tuviéramos una semana de receso entre estas dos partes, nos permitió tomar decisiones oportunas de cambio y mejora que garantizaran un mejor desarrollo del programa durante su segunda parte (seis últimas sesiones del curso-taller). Pero las reflexiones, evaluaciones y recomendaciones realizadas al final de la primera parte por todos los agentes (investigadores, observadores, expertos consultados y alumnos), no sólo han sido importantes para introducir cambios y mejoras de cara a la segunda parte, sino que siguen siendo relevantes para la evaluación general de la implementación de todo el programa, con miras a probables futuras generaciones y ediciones estandarizadas del mismo o de otros programas con características y propósitos similares.

Debemos recordar y tener en cuenta que, de acuerdo con el diseño metodológico, uno de los objetivos generales de la evaluación de la implementación del programa como de todo su desarrollo es el de recabar y proporcionar información sobre el proceso de ejecución con el fin de que todos los participantes e interesados lo comprendamos y tengamos información suficiente para elaborar nuestras propias conclusiones y proponer y tomar decisiones de cambio y mejora para futuras ediciones. Nuestro interés no es tanto el control del programa y de sus resultados, reflejados en el rendimiento de los alumnos, sino, más bien, obtener información validada empíricamente que permitan proponer mejoras curriculares que respondan apropiadamente a necesidades y expectativas de todos los participantes e interesados.

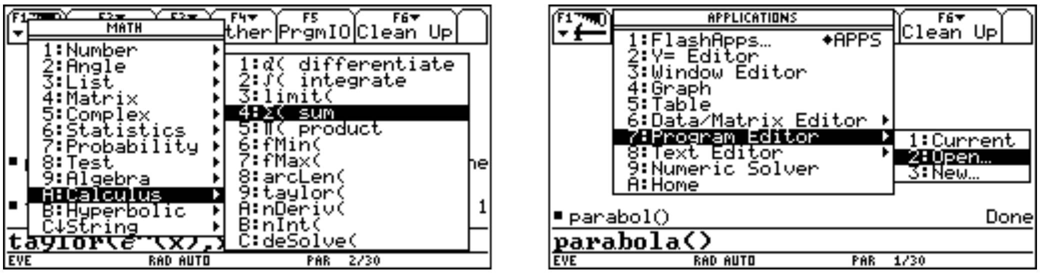
De la misma manera como lo hicimos para la primera parte, el balance de la implementación de la segunda parte lo presentamos organizada de acuerdo a los objetivos de trabajo y las distintas dimensiones (cuestiones de interés) de análisis y evaluación del programa. Para ello, confrontaremos la planificación que acabamos de presentar en el apartado anterior sobre cada uno de estos tipos de cuestiones, con lo realmente ejecutado, para lo cual tomaremos como referencia las transcripciones de los vídeos correspondientes a esta segunda parte del programa (véase Anexo 7) y las transcripciones de los casetes de audio con las grabaciones de las reuniones de evaluación por parte de los miembros del equipo de investigación (véase Anexo 8).

4.10.1. Balance sobre la programación de actividades y objetivos generales

Todas las actividades u objetivos de trabajo, tanto los de la primera parte (O.I.1. a O.I.6.) adaptados a la segunda en función de la tecnología empleada, como los de la segunda parte (O.II.1. a O.II.10.) fueron trabajados de manera satisfactoria durante estas cinco últimas sesiones. Sin embargo, los profesores tuvimos que emplearnos a fondo ante las numerosas e insistentes consultas, y las tendencias de los alumnos a descentrarse de los temas programados, especialmente cada vez que descubrían nuevas y más avanzadas opciones tecnológicas y matemáticas de la nueva tecnología (la calculadora TI-92). Este hecho hacía perder el normal desarrollo de las actividades programadas, al menos entre algunos alumnos o grupos de alumnos. Creemos que la decisión de permitirles llevar a casa las dos calculadoras junto con sus respectivos manuales de usuarios durante la semana intermedia de receso entre las dos partes del curso, fue una de las causas principales de esta situación. Los alumnos, al tener más libertad y tiempo, poder disponer de la tecnología y de acuerdo con sus verdaderos intereses se permitieron ir mucho más allá con respecto a los contenidos matemáticos y tecnológicos programados para el curso. Sin embargo, esta decisión también tuvo sus ventajas en el aula por cuanto que, una vez controladas las dispersiones, esto contribuyó a que los alumnos trabajaran con mayor autonomía y, por lo tanto, a que las sesiones, programaciones y actividades se desarrollaran de un modo más eficiente que durante la primera parte.

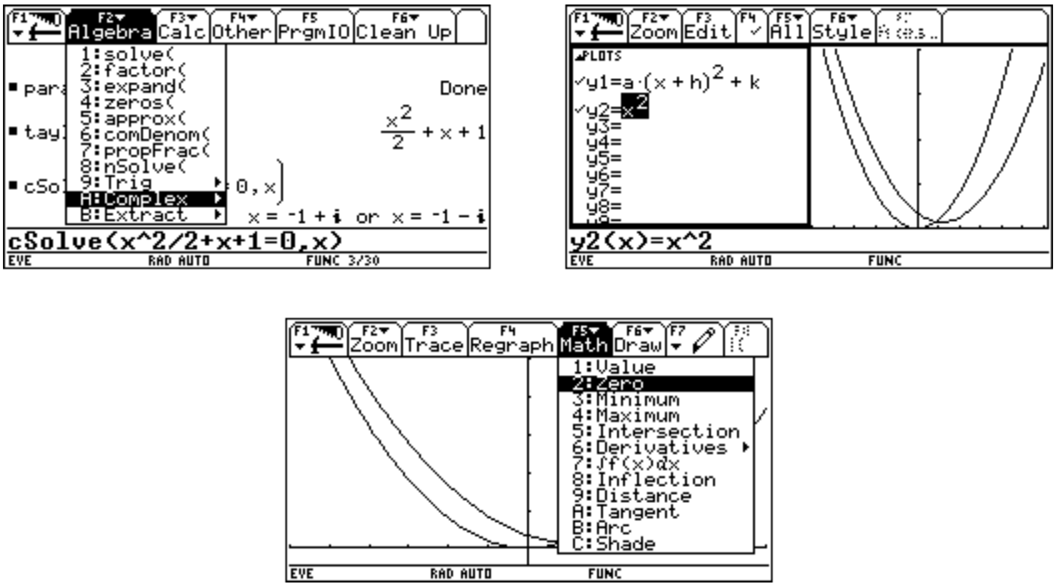
Este tipo de situaciones o hechos que hemos denominado como dispersiones han puesto de manifiesto cierto interés generalizado y frecuente por parte de la mayoría de los estudiantes del programa en las tecnologías empleadas como herramientas para realizar operaciones y actividades matemáticas avanzadas que tienen poca relación con las cuestiones curriculares o didácticas que nos ocupaban. Tal y como se ha dicho el principal interés de estos estudiantes por la tecnología estaba relacionado más con las matemáticas avanzadas que con el contenido matemático escolar propuesto en el programa y menos con su enseñanza. De hecho, durante distintos episodios de debates y puesta en común los estudiantes manifestaron su interés en que el curso incluyera otros tópicos del contenido matemático y otras funciones y opciones de la calculadora, que, según nuestra interpretación iban más allá de los intereses del curso y del currículo de secundaria. En particular se mostraron muy interesados en las distintas opciones del menú *Calculus* y de la aplicación de edición de programas (véase Figura 4.3).

Figura 4.3.
Opciones del menú *Calculus* y la Aplicación *Program Editor* de la TI-92



De todas maneras, consideramos que, al margen de los intereses del curso-taller para nuestro estudio, en una situación natural de formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria se deben incluir las principales utilidades de la tecnología empleada (en nuestro caso la CG TI-92) en relación con el currículo de secundaria, tales como, por ejemplo, las diferentes opciones del menú *F2: Algebra*, los diferentes menús con sus respectivas y múltiples opciones de edición y visualización de gráficas tales como *Y= Editor*, *Window Editor, Graph, Zoom, Table, Table Set*, y las diferentes opciones del menú *F5: Math*, que se indican en la siguiente Figura 4.4.

Figura 4.4.
Opciones del menú *F2:Algebra* (izquierda), menús de edición y visualización de gráficas de funciones (derecha) y opciones del menú *F5: Math* (abajo) de la supercalculadora TI-92



Otro aspecto del contenido didáctico del programa que creemos se debe considerar de una forma más explícita se refiere a la modelización como elemento organizador del currículo. Basándonos en el enfoque constructivista de la metodología del curso-taller y en la modalidad de desarrollo del contenido matemático basada en la resolución de problemas, con mucha frecuencia recurrimos a la modelización como estrategia de organización de las actividades que involucraban situaciones problemas. Sin embargo, aparte del contenido didáctico de la tercera sesión, no consideramos este tema y proceso de modelización de manera explícita y central en la planificación y desarrollo del programa.

En conclusión, podemos decir que, en términos generales y desde el punto de vista de los investigadores y evaluadores, la planificación del programa en función de la investigación, de su diseño, planificación metodológica, recogida de información, etc., fué más que adecuada, tanto en relación con el cumplimiento de los objetivos de trabajo como con la temporalización. Esto es así debido a que se consiguió trabajar sobre los distintos objetivos y propósitos previstos y se recogieron suficientes datos e información que permitieron realizar los análisis y evaluación necesarios y esperados. Sin embargo, como programa de formación inicial de profesores, a pesar de lo relativamente reducido del contenido matemático considerado, creemos que para poder desarrollar de manera integrada este tipo de contenido con los organizadores –SR y CG- y a las otras cuestiones sobre el conocimiento didáctico, es necesario dedicar, por una parte, un mayor tiempo de trabajo, al menos por parte de los alumnos, y por la otra, alternar el trabajo de aula con las necesarias prácticas de enseñanza por parte de estos alumnos en una aula real.

De todas maneras, hay que decir que, por ejemplo, en relación con la temporalización y desde el punto de vista de los estudiantes, en la encuesta de evaluación final del curso-taller (véase la Figura 4.5), a la mayoría (80%) les pareció que el tiempo dedicado a las CG TI-83 y a cada uno de los temas desarrollados fue más que suficiente, mientras que sólo un 20% respondieron que el tiempo dedicado a la TI-92 fue insuficiente, tal vez por la misma razón que hemos comentado anteriormente sobre el gran interés y expectativas que les supuso a los alumnos esta nueva tecnología, como por la gran cantidad de posibilidades tecnológicas, matemáticas y didácticas que contiene.

Figura 4.3.
Respuestas a los ítems sobre temporalización en la encuesta de evaluación final del tercer curso-taller correspondiente al estudio empírico

TEMPORALIZACIÓN	SUFICIENTE	INSUFICIENTE
TIEMPO PARA LA TI-83	80%	20%
TIEMPO PARA LA TI-92	20%	80%
TIEMPO A CADA TEMA	80%	20%

4.10.2. Balance sobre el contenido matemático y las actividades asociadas

Todos los ítems del contenido matemático previstos y las actividades respectivas propuestas para trabajar sobre ellos fueron desarrollados satisfactoriamente en esta segunda parte del programa. Además, en la encuesta de evaluación final del curso-taller, la mayoría de los alumnos (80%) contestó que el tiempo dedicado a cada uno de los temas durante todo el curso (primera y segunda parte) les pareció suficiente (véase Figura 4.4).

De nuevo, creemos necesario aclarar que con respecto al programa concebido como un instrumento de nuestro diseño de investigación (evaluativa), el contenido matemático específico ha sido adecuado y suficiente; sin embargo, también consideramos que como una estrategia de formación de profesores que incluya el conocimiento y dominio de una tecnología como las que hemos utilizado en este trabajo, este contenido debería ser ampliado a por lo menos un conjunto de temas o tópicos básicos de tal modo que permitan acceder a las principales utilidades y posibilidades tecnológica-matemáticas de la herramienta tecnológica utilizada.

4.10.3. Balance sobre el contenido tecnológico

No hay duda que para los alumnos la gran estrella de la segunda parte del programa y del curso-taller fue la calculadora TI-92. El gran interés y la motivación que esta tecnología generó, junto con la experiencia y conocimientos adquiridos con la otra calculadora (TI-83) en la primera parte del curso, la entrega anticipada de la TI-92 con su respectivo manual de usuarios, permitiendo que la tuvieran en casa durante más de una semana de receso entre las dos partes del curso, así como la gran diversidad de utilidades y opciones tecnológico-matemáticas y didácticas de esta nueva calculadora, contribuyeron definitivamente a que, no sólo se trabajara todo el contenido programado sobre la tecnología, sino que, incluso, con mucha frecuencia, dentro y fuera de las clases consultaran y trabajáramos sobre otros aspectos que no estaban programados.

En general y al margen de los objetivos del curso-taller, lo que más interesó a los alumnos fueron, por una parte, las distintas opciones y posibilidades de tratamiento de funciones y otras nociones y procedimientos matemáticos más avanzados (temas de análisis, cálculo simbólico de límites, derivadas, integrales y series complejas, funciones de varias variables, de variables complejas, series de Taylor, integrales complejas, etc.) que los que proponíamos trabajar en el curso, y por la otra, conseguir un mejor conocimiento y dominio de la calculadora TI-92.

De hecho, al final del curso-taller, tanto en las reflexiones conjuntas y debates sobre la evaluación final del curso como en la encuesta de evaluación final aplicada, la mayoría de los alumnos expresaron opiniones sobre la necesidad de haber dedicado más tiempo para conocer mejor las posibilidades de esta calculadora (TI-92) y explorar otros contenidos tecnológicos y matemáticos con ella, como, por ejemplo, la edición y utilización de programas. Incluso, algunos propusieron que estas tecnologías y este tipo de cursos se deberían programar regularmente en su plan de estudios. Algunos alumnos para profesores hicieron los siguientes comentarios y propuestas:

Ana: - "Este curso se debería de introducir como una asignatura en la carrera, porque me parece bastante importante que futuros profesores como vamos a serlo nosotros sepamos sacarle partido a la calculadora gráfica" (Ana, Encuesta de evaluación final).

Roberto: - "Yo pienso que este curso debería haber sido bastante más amplio dadas las grandes riquezas que tiene este tema de las calculadoras" (Roberto, Encuesta de evaluación).

Irene: - "Me parece importantísimo el que un profesor sepa programar la calculadora, porque con ello podría elaborar programas para resaltar más los conceptos que se pretende enseñar a los niños" (Roberto, Encuesta de evaluación).

Isaías: - "Yo pienso que la programación la hemos hecho de una manera muy rápida. Creo que con la programación se podrían hacer muchas más cosas de tipo metodológicas que ayudarían a hacer más comprensivas las matemáticas. Didácticamente se podrían desmenuzar las matemáticas de una manera mejor y hacer que los alumnos participen más en lo que van haciendo. Creo que así se puede aprovechar todavía más la calculadora.

- Yo creo que nosotros como futuros profesores deberíamos saber programar. Yo creo que la programación es muy importante. Porque, un programador lo que hace es ejecutar tus instrucciones, pero, uno tiene que saber las posibilidades, lo qué puede hacer la calculadora" (Isaías, E.X.02.: M.X.03.).

Juan: - "Yo también creo que si sería necesario meter lo de la programación, porque, eso quitaría el misticismo que hay sobre la máquina, que parece ser que solamente hay unos elegidos y los demás, sólo tenemos que apretar botoncitos y salen las cosas. Si uno se pone a hacer un programa de lo que sea, puede ir viendo lo que es la teoría, que no tiene magia la cosa, que es matemática aplicada" (Juan, E.X.02.: M.X.03.).

Irene: - "Pero, entonces, tienes que saber qué posibilidades y qué límites tiene la calculadora, qué es capaz de hacer. Así, si la conoces bastante bien, podrás saber cuando y como hay que utilizarla. Por ejemplo, yo ahora mismo estoy haciendo lo que son las funciones cuadráticas, pero si necesitara matrices, no sabría como hacerlo, ni cómo la metería en el aula" (Irene, E.X.02.: M.X.03.).

Otro hecho importante a resaltar es que, al contrario de la primera parte del programa, en esta parte, seguramente por las mismas razones que explicamos al comienzo de este apartado, en los alumnos predominó más el trabajo autónomo, creativo y mostraron un mejor dominio de la tecnología al intentar resolver las distintas actividades que les propusimos. Esta afirmación se puede comprobar por la mayor rapidez y eficiencia con que trabajaban sobre las diferentes actividades. Además, esto se puede explicar también como consecuencia de la gran aceptación y predisposición favorable que la nueva tecnología generó en todos los alumnos; aceptación y predisposición en relación al menos con sus intereses como estudiantes de matemáticas, aunque no así, para la mayoría, como instrumento de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tal y como veremos en el siguiente apartado. Esto plantea cierta contradicción porque la mayoría de alumnos para profesores aceptan la tecnología como estudiantes de matemáticas (digamos, para trabajar e incluso aprender matemáticas), pero algunos ya no la aceptan para enseñar o para que alumnos de Secundaria aprendan matemáticas con ella.

4.10.4. Balance sobre la formación didáctica

Tal y como lo hemos dicho ya, en este estudio nos interesan determinados aspectos de la FD (mencionados en el apartado 5.3.4) en relación directa con el contenido matemático y las tecnologías que hemos empleado; en particular, nos interesa observar y recoger información sobre las variaciones que experimentan los alumnos para profesores a lo largo de las distintas partes y fases del programa, en relación con estos diferentes aspectos de la FD. Pero, en este capítulo de la implementación solamente nos preocupamos por señalar si el contenido relacionado con el conocimiento –conceptual, procedimental y actitudinal- sobre la tecnología ha sido apropiado desde el punto de vista de las bases conceptuales del diseño del programa y de la adecuada planificación frente a lo realmente ejecutado o realizado.

Al revisar las diferentes producciones, intervenciones y tareas finales de los alumnos participantes (véase, por ejemplo, la trascripción de la grabación del debate final de la última –décima- sesión) podemos constatar que todos los aspectos mencionados en la planificación sobre la FD han sido tratados de diversas formas y han quedado registrados en diferentes soportes e instrumentos (cintas de vídeos, grabaciones de audio, producciones escritas, tareas finales, encuesta de evaluación final, aplicación de la escala de actitudes, etc.). Por lo tanto, podemos afirmar que la implementación del programa en relación con la FD ha sido satisfactorio, en el sentido de que durante todas las fases y partes del programa se ha reflexionado conjuntamente y se ha trabajado individualmente sobre todas y cada una de las cuestiones relacionadas con la FD que nos ha interesado aquí.

Un hecho relevante de señalar es que la mayoría de los alumnos tenían mayores y mejores conocimientos, dominio, autonomía y predisposición favorable sobre y hacia la tecnología como tal, pero no mostraron esta misma predisposición con las posibilidades de integrar y utilizar tales tecnologías en el currículo y en sus propuestas de enseñanza sobre el contenido matemático.

4.10.5. Conclusiones generales: propuestas de cambio y mejora para una generación futura

Tal y como lo hemos dicho, la evaluación y las recomendaciones de cambio y mejora de la primera parte siguen teniendo validez para la segunda parte y para todo el programa en general. Por eso remitimos al lector a la sección 4.8 de conclusiones generales sobre la implementación de la primera parte y las propuestas de cambio y mejora correspondientes.

En términos globales, podemos decir que, de acuerdo con los informes presentados en las secciones anteriores, la coherencia entre lo planificado y programado y lo efectivamente ejecutado es, a pesar de los cambios que tuvimos que introducir entre la primera y la segunda parte, altamente adecuado. Al final del curso-taller en el que se concretó el programa, todos los objetivos, tanto de la primera como de la segunda parte se alcanzaron a trabajar apropiadamente; lo mismo ocurrió con los distintos ítems del contenido matemático (asociados con la EC y la pluralidad e interacción entre los múltiples SR); así como con las distintas cuestiones relacionadas con las tecnologías empleadas (CG TI-83 y TI-92) y los diferentes aspectos relacionados con el conocimiento didáctico (CD) y la formación didáctica (FD).

4.10.6. Valoraciones finales

En los dos siguientes capítulos analizaremos las modificaciones (resultados) en relación con los conocimientos –conceptuales, procedimentales y actitudinales- que experimentaron los alumnos para profesores participantes del programa con respecto a las cuatro cuestiones principales del estudio. Para terminar con esta evaluación del proceso de ejecución del programa y de su concreción principal, el curso-taller, presentamos las valoraciones que hicieron los diferentes participantes en las encuestas, debates y reuniones de evaluación final.

Patricia: - "Creo que es necesario que el profesor tenga un conocimiento muy amplio de las posibilidades y del manejo de las calculadoras.

- Además, sería necesario la existencia de clases independientes a las de matemáticas para que el niño aprenda a utilizarlas.

- Pero, el niño perderá soltura en la resolución de operaciones y utilización de propiedades, como descomposición en factores, división y multiplicación, etc., y en cálculo de derivadas e integrales...

- Al introducir las calculadoras graficadoras en el currículo se le debería dar más importancia al razonamiento matemático que al algorítmico…

- Y estas deben de entrar a formar parte de los instrumentos de que disponga el niño siempre, en el trabajo diario y en los exámenes, aunque no la use en todo momento..." (Patricia, Encuesta de evaluación final, Anexo 3).

Antonio: -" La implantación de la calculadora a nivel de Secundaria provocaría la necesidad de tener que ampliar horas de matemáticas o crear asignaturas específicas para trabajar con la calculadora...

- También se deben modificar los planes de estudio de licenciatura, dando lugar a las nuevas tecnologías...

- Pero, el hecho de implantar la calculadora en el aula es en mi opinión más complicado de lo que parece...

- Se debería revisar la evaluación y habría que darle un cierto valor al manejo de la calculadora, pero sin olvidar que estamos en clase de matemáticas...” (Antonio, Encuesta de evaluación final, Anexo 5).

Roberto: - “Hay que tener mucho cuidado en que la calculadora no vaya a sustituir a la mente humana...

- Al proponer un problema que se aplicase a una situación real y en la que hubiera que plantear un sistema, resolviendo este con el manejo de la calculadora... No se hasta que punto esto sería bueno, en el sentido de que el niño no sabría resolver ecuaciones ni sistemas...

- ¿Y si en el futuro aparecen calculadoras que también realizan razonamientos algebraicos como estos...? ¿En qué nos convertiríamos los humanos?” (Roberto, Encuesta de evaluación final, Anexo 5).

Isaías: -“ En conclusión un curso como este es beneficioso tanto para futuros profesores como para profesores consagrados. La visión que nos da la calculadora a simple vista es la de ser una herramienta de apoyo y de desarrollo de la matemática.

- No se debe ver esta nueva tecnología como una revelación, la utilización de esta no debe excluir otras formas de enseñanza sino que la complementa.

- Pero, habría que cambiar la metodología de clase. Los problemas prácticos volverían a adquirir un papel predominante en la Enseñanza Secundaria. Y el profesor ya no se vería como la única fuente del saber sino que en ocasiones actuaría de canalizador de la matemática aportada por la calculadora” (Isaías, Encuesta de evaluación final, Anexo 5).

María Jesús: - “Un problema que le veo a la calculadora es que el alumno puede encontrar dificultad en su manejo, así puede ser más fácil que suspenda porque tiene doble dificultad que entienda el concepto matemático y a parte que sepa manejar la calculadora” (María Jesús, Encuesta de evaluación final, Anexo 5).

Juan: -“ Pienso que en general es un gran avance el uso de las nuevas tecnologías en las aulas por todas las ventajas que he mencionado anteriormente. Además, pienso que todas las desventajas reseñadas son de algún modo, más menos fácilmente solucionables.

- Creo que con un poco de voluntad y cuando todo el mundo esté realmente concienciado de la gran utilidad y paso adelante que supone unir esta tecnología a la educación, entonces realmente la humanidad habrá dado otro paso importante en su historia” (Juan, Encuesta de evaluación final, Anexo 5).

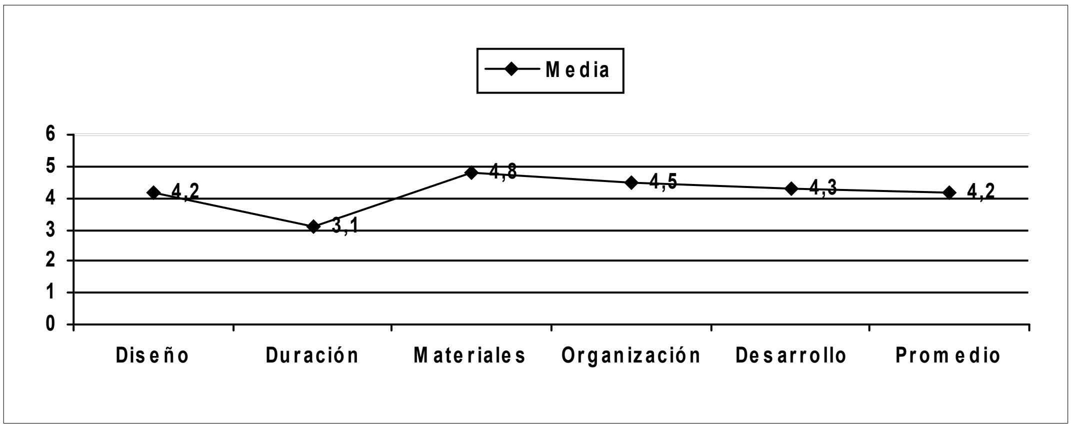
Finalizamos este capítulo y esta evaluación de la implementación del programa presentando los resultados de la valoración que hicieron los estudiantes para profesores en la encuesta de evaluación final del curso-taller (véanse Tabla 4.4 y Figura 4.5).

Tabla 4.4.
Resultados de la encuesta de evaluación final del programa por parte de los futuros profesores

VALORACIÓN DEL CURSO	$\overline{X}$	**σ**	**MUY DE ACUERDO**	**DE ACUERDO**	**ACEPTABLE**	**EN DESACUERDO**	**EN TOTAL DESACUERDO**
DISEÑO	4,2	0,79	4	4	2		
DURACIÓN	3,1	0,99		4	4	1	1
MATERIALES	4,8	0,42	8	2			
ORGANIZACIÓN	4,5	0,52	5	5			
PRESENTACIÓN Y DESARROLLO	4,3	0,67	4	5			
PROMEDIO GLOBAL	**4,2**	**0,44**					

Obsérvese que la mayoría hizo una valoración positiva en todos los criterios de evaluación que les propusimos (diseño, duración, materiales utilizados, organización y presentación y desarrollo). Obsérvese en el polígono de frecuencias (Figura 4.4) que todas las medias están por encima de 4,0, excepto la correspondiente a la duración del curso que de todas maneras está por encima de 3,0. En los seis casos que contestaron que la duración del curso era aceptable, en desacuerdo y en total desacuerdo, respectivamente, se infiere de las respuestas que estos alumnos dieron a los ítems sobre la temporalización relativa a las dos calculadoras (TI-83 y TI-92) y a cada uno de los temas del contenido (véase Figura 4.4), respectivamente, que hubieran preferido que el curso hubiera durado más tiempo. En definitiva, el promedio global incluyendo el resultado de la duración del curso fue de 4.2.

Figura 4.5.
Polígono de frecuencias con las medias de la encuesta de evaluación final del programa por parte de los futuros profesores



4.11. Resumen y conclusiones generales sobre el diseño y evaluación del programa

Para llevar a cabo el análisis y la evaluación objetiva del programa, esto es, el análisis y evaluación de sus necesidades, diseño, planificación e implementación consideramos dos tipos de categorías o dimensiones (véase apartado 3.7): I. Dimensión estructural y, II. Dimensión logística, con sus respectivos sistemas de indicadores, organizados de acuerdo con la "estructura del proceso metodológico" propuesto por Pozo (2000, p. 378).

Con respecto a la primera dimensión objetiva (D-O.I), referida a las características estructurales del programa, nos preocupamos por evaluar los aspectos relacionados con sus necesidades, diseño y planificación. Para ello consideramos tres sistemas de indicadores (véase apartado 3.8) referidos a la adecuación local a las necesidades sociales, institucionales y curriculares y a las demandas formativas de los futuros profesores de matemáticas que participaron en el programa, así como a la coherencia interna de este con respecto al currículo local y el marco conceptual. Y con respecto a la segunda dimensión (D-O.II), referida a los distintos aspectos logísticos del proceso de implementación, consideramos principalmente la adecuación temporal, ajuste de contenidos (matemático, tecnológico y didáctico) en sus distintos campos estructurales cognitivos –conceptual, procedimental y actitudinal-.

En términos generales, los resultados de la realización, análisis y evaluación del programa así como de su impacto sobre los interesados nos permite concluir que los propósitos curriculares y formativos se han logrado casi totalmente. Así lo verifican las distintas valoraciones que han hecho tanto los agentes del programa (véase, Figura 4.5), como los observadores y expertos entrevistados al respecto. En la figura mencionada podemos observar que al aspecto del programa que se le ha asignado una menor valoración es a la duración del curso-taller (3.1), en particular, en relación con la segunda parte correspondiente a la CG TI-92. El 80% de los participantes consideraron que el tiempo destinado a esta tecnología fue insuficiente, mientras que el mismo 80% lo consideró suficiente tanto para la otra calculadora (TI-83) como para los distintos tópicos del contenido matemático desarrollados en las dos partes del curso (véase Figura 4.4).

Desde nuestro punto de vista como investigadores, profesores del curso y evaluadores del programa consideramos que el tiempo optimo para la realización de un curso-taller con las características y objetivos como el que hemos desarrollado debe ser de cinco sesiones (15 horas) más que las consideradas inicialmente, distribuidas así: una sesión más para la primera parte y cuatro más para la segunda. De este modo, el curso tendría una intensidad horaria total de 45 horas (tres horas por sesión), distribuidas de la siguiente forma: cinco sesiones (15 horas) para la primera parte (correspondiente a la CG TI-83) y diez sesiones (30 horas) para la segunda (correspondiente a la CG TI-92). La experiencia durante las distintas ediciones del curso-taller y conferencias que realizado nos permite concluir que el tiempo mínimo necesario para hacer una introducción básica sobre la TI-92, de tal forma que los estudiantes puedan conocer y familiarizarse con las principales funciones, aplicaciones, opciones tecnológicas y utilidades didácticas de esta supercalculadora, es de 30 horas.

Con respecto al contenido matemático y desde el punto de vista de la recogida de información y la temporalización, su selección y secuenciación fueron adecuadas. Sin embargo, a los estudiantes les pareció que para futuras ediciones del curso debieran incluirse otros temas de Geometría, Álgebra, Análisis e incluso de Probabilidad y Estadística. Desde un punto de vista curricular o didáctico, estamos de acuerdo con la conveniencia de incluir algunos tópicos específicos, complementarios y básicos de la Geometría, el Álgebra y el Análisis, tales como transformaciones geométricas, matrices, límites, asíntotas y derivadas, al menos intuitiva, gráfica y numéricamente. De todas maneras, consideramos que estas demandas de los estudiantes, las cuales se repitieron durante todas las ediciones del curso-taller, obedecen más a sus intereses predominantes sobre las matemáticas en general y las distintas posibilidades de la calculadora TI-92, las cuales iban descubriendo y conociendo a través del manual de usuarios y las diversas exploraciones que ellos mismos realizaban continuamente.

En relación con las tecnologías empleadas y con el conocimiento tecnológico, es decir, conocimientos sobre la tecnología como recurso didáctico, consideramos, por una parte, que sobre el dominio técnico de cada una de las calculadoras empleadas (TI-83 y TI-92) los estudiantes para profesor no encontraron ningún tipo de dificultad insuperable. Sin embargo, con respecto a la utilización creativa y autónoma de la tecnología como recurso didáctico, la mayoría de los estudiantes pusieron de manifiesto muchas dificultades o limitaciones. Consideramos que para ediciones futuras del curso-taller es necesario prestar mucha más atención a este aspecto, ya que con el sólo aprendizaje del manejo de las calculadoras y el apoyo de los respectivos manuales de usuarios no se consigue en general un dominio de las utilidades didácticas de estas tecnologías. Entre otras razones porque el manual de usuarios está diseñado específicamente para aprender el manejo técnico de la respectiva calculadora y no para sacarle partido como recurso o contenido organizador del currículo.

Por otra parte, consideramos que la estrategia de introducir primero la calculadora TI-83, de un modelo tecnológico más sencillo y asequible fué muy acertada. Esto permitió a los estudiantes para profesor, no sólo conocer un recurso tecnológico y didáctico más, sino que facilitó la introducción de la otra calculadora (TI-92), de un modelo tecnológico mucho más complejo y con mayores posibilidades matemáticas y didácticas, gracias a que, por un lado, ya se ha superado la situación de novedad y expectativa inicial sobre la tecnología y, por el otro, gracias a la experiencia y conocimientos adquiridos sobre la tecnología. En relación con la disponibilidad, consideramos que es necesario que el Centro donde se lleve a cabo un curso de formación de profesores disponga de unidades suficientes de estos recursos y los accesorios tecnológicos necesarios (pantallas de aula adecuadas, ordenador y software en el aula, View Screen, Graph Link, materiales impresos, etc.), porque esto permite no sólo planificar mejor y con más tiempo las actividades de aula a realizar, sino que permite que se realicen algunas actividades formativas previas tanto por parte de los estudiantes como por parte de los profesores. La totalidad de los estudiantes que participaron en las diferentes ediciones del curso-taller consideraron que un curso como el que le impartimos debiera estar programado regularmente en su propio Plan de formación, tanto como futuros Licenciados, como futuros profesores de matemáticas. Además, se quedaron muy motivados e interesados por conocer otras funciones y aplicaciones de la CG TI-92 que no estaban programadas en el curso, tales como las "funciones avanzadas" y las "aplicaciones" de edición de datos, matrices y sobre todo de programación.

Finalmente, en relación con las cuestiones sobre el conocimiento didáctico (**CD**), la mayoría de los estudiantes para profesor (70%) no pusieron de manifiesto un dominio autónomo de los conocimientos impartidos en la asignatura de didáctica de la matemática ni durante el desarrollo del curso-taller. Esto lo inferimos de los análisis sobre las modificaciones del CD cuyos resultados se presentarán en el siguiente capítulo. En general, los estudiantes se limitaron a cumplir con los requerimientos de las tareas y actividades durante las distintas fases del programa, organizándolas de acuerdo al orden propuesto por los profesores del curso, pero reflejando en cada unos de sus apartados sus propias concepciones sobre la estructura conceptual de los tópicos matemáticos, su enseñanza y la tecnología. Consideramos que para futuras generaciones del programa es necesario revisar estas cuestiones, especialmente con miras a que los alumnos participantes tomen conciencia de que todo el esfuerzo realizado por los organizadores del programa y del curso-taller asociado está orientado a mejorar su formación didáctica como futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. En particular, se debe prestar especial atención a los distintos aspectos de los contenidos matemáticos, cognitivos, tecnológicos y didácticos sobre la estructura conceptual (**EC**) del contenido matemático en cuestión, la pluralidad e interrelación de los sistemas de representación (SR) y las utilidades didácticas de los recursos tecnológicos concebidos como herramientas mediadoras, visualizadoras y manipuladoras de los distintos tipos de representaciones. La mayoría de los estudiantes no tienen una idea clara sobre la diferencia que hay entre el conocimiento matemático disciplinar y el conocimiento matemático escolar. Por ejemplo, no dominan el carácter estructural, representacional y cognitivo de los conceptos matemáticos cuando se trata de ser enseñados. En las próximas generaciones del programa, se debe hacer más énfasis en que los contenidos organizadores del currículo deben ser considerados de forma conjunta y sistémica. Además, dado el tratamiento didáctico constructivista, basado en la resolución de problemas por lo cual propugnamos, consideramos que la modelización debiera ser incluido como un cuarto elemento organizador en el modelo local de los organizadores que hemos propuesto en este estudio.

En síntesis, fueron tres las principales conclusiones del estudio con respecto a la evaluación del programa: La primera, se refiere al diseño y construcción del programa considerado como una unidad formativa e investigativa que se ha concretado en la práctica en un curso-taller con sus respectivas planificación, programación y elaboración de materiales y recursos matemáticos, tecnológicos y didácticos. Esta concreción se ha elaborado, mejorado y puesto a punto a través de sucesivas generaciones y evaluaciones empíricas. La segunda se refiere al estudio de la viabilidad del desarrollo de una propuesta de innovación curricular local relacionada con la incorporación de las modernas calculadoras graficadoras y la consideración de los múltiples sistemas de representación convencionales y usuales para el estudio de las funciones en el currículo de matemáticas de enseñanza secundaria. La tercera, se refiere al estudio (descripción) y caracterización del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria del Plan de Formación Inicial del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Esta caracterización condujo a la identificación de diferentes grupos (tipologías) de futuros profesores de matemáticas en relación con la opción de incorporar y usar innovadoramente las nuevas tecnologías de representación y los múltiples sistemas de representación como recursos y conocimientos útiles para la enseñanza de las funciones en el currículo de secundaria. El estudio de estas características de los futuros profesores de matemáticas y su organización en tipologías se realizarán más adelante en los capítulos V y VI.

Finalmente, en el Anexo 5.3 presentamos una ficha técnica de auto-informe de evaluación global del programa de acuerdo con los protocolos estándares de evaluación propuestos en la literatura sobre metodología de investigación evaluativa (Fernández Cano, 1991).

V

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO RELATIVO AL MODELO DE LOS ORGANIZADORES

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los resultados de la evaluación de los **conocimientos didácticos** de los participantes del **programa**. Estos conocimientos están relacionados con los diferentes elementos que componen el modelo local de los organizadores en que se basa nuestro estudio, a saber: conocimientos sobre la **estructura conceptual** (**EC**) de los tópicos del contenido matemático sobre los cuales trabajamos; el dominio y las actitudes hacia las **calculadoras graficadoras** (**CG**), y los **conocimientos didácticos** (**CD**), base de la **formación didáctica** (**FD**), por los que nos hemos preocupado en este estudio.

En relación con el **CM** nos hemos interesado en analizar las modificaciones en la estructura conceptual (**EC**), relativa a dos dimensiones principales: conceptos y procedimientos. Para ello, hemos tenido especialmente en cuenta, el tratamiento de los diferentes sistemas de representación (**SR**) convencional de la noción de función, así como la visualización didáctica y los procesos de modelización y resolución de problemas relacionados con este **CM**. En relación con las **CG**, nos hemos interesado por las modificaciones de las actitudes y relativas al dominio de las utilidades didácticas de estas tecnologías. Finalmente, en relación con las competencias referidas al **CD**, nos hemos propuesto evaluar los cambios experimentados por los sujetos del estudio empírico en relación con la planificación de tareas para la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas escolares, basadas en las perspectivas curriculares, didácticas y tecnológicas que les propusimos a estos alumnos en los documentos de trabajo y en cada una de las sesiones prácticas del curso-taller.

Los instrumentos que utilizamos para la recogida de datos e información que nos permitiera realizar la evaluación de estos tres tipos de contenidos fueron principalmente los siguientes (véase Tabla 3.1):

(i) Para el conocimiento referido a la **EC** y los **SR**: los mapas conceptuales, las definiciones, y las demás producciones de los alumnos durante el desarrollo de cada una de las sesiones del curso-taller y las notas de campo de los investigadores y observadores.

(ii) Para el conocimiento sobre las actitudes y dominio de las **CG**, utilizamos la escala de actitud, la encuesta de evaluación final del seminario, las producciones de los alumnos durante el desarrollo del curso y las notas de campo de los investigadores y observadores.

(iii) Para la evaluación de los procesos relativos al **CD** utilizamos las diferentes propuestas de actividades didácticas, las producciones de los alumnos en las tareas iniciales, finales e intermedias realizadas durante el desarrollo de las diferentes sesiones del curso-taller.

Este capítulo consta de tres partes: en la primera (5.2) presentamos los resultados de los análisis relacionados con el conocimiento matemático; en la segunda (5.3) los resultados del análisis y evaluación relativa a las actitudes y utilidades didácticas de las tecnologías; y, en la tercera (5.4) presentamos el análisis de las modificaciones relativas al conocimiento didáctico de los alumnos. Para el conocimiento didáctico tomamos como referencia las distintas propuestas, comentarios y producciones de los alumnos relacionadas con la enseñanza-aprendizaje y evaluación del contenido matemático, basadas en la pluralidad de los sistemas de representación convencionales para las funciones, así como las utilidades didácticas de las CG que hemos empleado.

5.2. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR

La **estructura conceptual** (**EC**), objeto de este estudio, se refiere a los distintos aspectos de las dimensiones **conceptual**, **procedimental** y **actitudinal** específicas del contenido matemático (**CM**) que nos ocupa – **función, función cuadrática**, **trinomio de segundo grado** y **ecuación cuadrática -**. De acuerdo con esto, nos hemos interesado en analizar y evaluar los procesos de modificación de las producciones de los alumnos en relación con estas estructuras conceptuales, especialmente relacionados con el empleo de los múltiples **sistemas de representación** (**SR**), en situaciones de resolución de situaciones-problema. Esta evaluación se ha llevado a cabo mediante el análisis (observación, registro, organización, descripción) y valoración de diferentes aspectos y manifestaciones del conocimiento matemático. Para ello, hemos empleado instrumentos de distinta naturaleza, tales como, los diagramas conceptuales, las definiciones y otras producciones de los alumnos realizadas y registradas en sus diarios de trabajo durante las distintas sesiones y fases del estudio.

Teniendo en cuenta nuestra perspectiva teórica y los instrumentos de análisis de los procesos de modificación de los aspectos conceptuales del conocimiento matemático, vamos a considerar, las definiciones y los diagramas conceptuales presentados por los alumnos en las tareas iniciales y finales, además de sus producciones durante el desarrollo de cada una de las sesiones del curso-taller. Estas producciones y las técnicas de análisis, han permitido recabar datos acerca de los distintos ítems (hechos y conceptos) sobre los cuales los alumnos basan las **estructuras conceptuales** que proponen sobre los contenidos matemáticos en cuestión.

Las definiciones y diagramas conceptuales presentados por los alumnos en las multitareas iniciales y finales, constituyen los instrumentos principales de análisis de los procesos de cambio relativos a la estructura conceptual, la organización y el funcionamiento didáctico profesional de los diferentes tópicos del contenido matemático. De hecho, uno de los objetivos específicos que nos propusimos con estas definiciones y diagramas conceptuales era poder detectar y caracterizar alguna modificación conceptual en los alumnos a lo largo del desarrollo del programa.

Los procesos de cambio conceptual en general, son procesos lentos y complejos que requieren y ponen en funcionamiento la movilización de múltiples componentes cognitivas y diferentes dimensiones del proceso. Y están relacionados con otra serie de dimensiones, como son los procesos de enseñanza, aprendizaje y de cambio actitudinal (Gutiérrez, 1997). Ésta es una de las razones por la que, para poder realizar una tarea de diagnóstico y evaluación de las ideas previas y posteriores de los alumnos no hemos querido focalizar exclusivamente un solo instrumento sino emplear diversos instrumentos que permitan determinar el punto de partida previo (tareas iniciales), intermedio (producciones durante las sesiones) y final (tareas finales). En este estudio no nos proponemos describir esta complejidad de los procesos de cambio conceptual desde una perspectiva estrictamente cognitivas, sino más bien destacar y caracterizar algunos de los indicadores externos de este cambio, que hemos denominado aquí como modificación del conocimiento relativo a la estructura conceptual sobre el contenido matemático escolar en cuestión.

Uno de los compromisos que asumieron los alumnos del programa, como requisito para la evaluación final, fue presentar una multitarea (tarea con múltiples componentes) al iniciar el curso, la cual debían mejorar y ampliar al finalizar este. Una de las exigencias explícitas, consistió en formular una definición integradora de función cuadrática y a continuación elaborar un mapa o diagrama conceptual sobre el dominio sistémico, relativo al contenido matemático específico sobre el cual trabajamos durante el desarrollo del curso (véanse multitareas inicial y final en el Anexo 4).

5.2.1. Análisis de definiciones iniciales

A los estudiantes del curso-taller se les pidió que presentaron en sus multitareas iniciales y finales definiciones de la función cuadrática. Pero, solamente siete de los diez que participaron las formularon explícitamente. Los tres alumnos que no formularon estas definiciones empezaron sus tareas presentando los tópicos más importantes que habían seleccionado, y a continuación, en las actividades de introducción, motivación y desarrollo, utilizaron las expresiones "función cuadrática" y "ecuación cuadrática" como si su significado estuviera dado implícitamente. Todos los alumnos incluyeron estos dos conceptos entre los tópicos más importantes de enseñar. Esta práctica, que consiste en considerar determinadas nociones y procedimientos importantes como dadas y conocidas implícitamente ha sido muy habitual entre la mayoría de los estudiantes para profesor que han participado en las sucesivas ediciones del curso-taller.

En general, las definiciones iniciales presentadas por los (siete) alumnos del estudio empírico fueron esencialmente de dos tipos: algebraicas sin referencias gráficas y algebraicas con referencias gráficas. Todos los alumnos utilizaron un híbrido de lenguajes natural (o verbal) y simbólico-algebraico. La mayoría (72%) presentaron inicialmente definiciones de un estilo sintético, con apoyo de una expresión algebraica formal. El estilo de estas definiciones es propio del contexto escolar tradicional. Por ejemplo, Roberto formuló la siguiente definición inicial:

> *Se llaman funciones cuadráticas las que adoptan una fórmula del tipo $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$.*

Y otra alumna (Ana) dio la siguiente definición inicial:

> *Se llaman así las funciones que responden a la siguiente ecuación: $y=ax^2+bx+c$, donde a, b y c, son números reales y $a\neq 0$. A estas funciones también se les suele llamar "parábolas".*

En estos dos ejemplos las definiciones son prácticamente idénticas. La diferencia estriba en que la segunda alumna agrega el término "*parábolas*", como sinónimo del concepto de función cuadrática. A estos alumnos les pedimos explícitamente que formularan una definición de función cuadrática dirigida a estudiantes de Segundo de ESO (15/16 años), y les dijimos que debían tener en cuenta que estos estudiantes era la primera vez que se enfrentaban a dicho concepto. Este tipo de definición que hemos llamado ***euleriana***[1], está expresada en un híbrido de lenguajes natural y simbólico, centrado en una terminología algebraica, con cierta referencia gráfica verbal, pero, con total ausencia de

[1] Una de las primeras definiciones de función que se conoce en la matemática fue la dada por el matemático suizo Lehonard Euler en el año 1734. De carácter básicamente algebraico, con referencia gráfica y en lenguaje natural: *Una función es cualquier expresión algebraica que contiene variables y constantes*

representación y propiedades gráficas explícitas. Inicialmente, todos los sujetos presentaron este mismo tipo de definición. Y solamente dos de ellos la complementaron con este tipo de referencia gráfica explícita, expresada en lenguaje verbal. Veamos, por ejemplo, la definición inicial dada por María Jesús:

> *Se llama función cuadrática a la dada por la expresión* $y=ax^2+bx+c$ *con* $a\neq 0$. *Su gráfica se llama parábola.*

Y la definición inicial dada por Rosario:

> *Una función de 2º grado, también denominada cuadrática, es una función de la forma* $y=ax^2+bx+c$. *Su gráfica es una parábola.*

Claro que, como era de esperarse, por tratarse de estudiantes de último curso de una carrera de Matemáticas, con un conocimiento matemático de alto nivel, ninguno dio una definición incorrecta o con algún tipo de error, desde el punto de vista estricta y rigurosamente matemático. Es destacable el hecho que la totalidad de las definiciones iniciales de función cuadrática, especialmente los dos últimos tipos, con referencia verbal gráfica, parecen evocar el *leit motiv* inicial del concepto de función, que inspiró una de las primeras definiciones formales de este importante concepto, como lo fue la definición de Euler. En su época, los matemáticos estaban interesados en el problema del estudio del movimiento, de las propiedades de las gráficas que describen y modelizan su trayectoria y, particularmente, en el estudio de las intersecciones con el eje de las abscisas de estas gráficas, así como con el problema asociado de las raíces de las ecuaciones correspondientes. Parece evidente que la concepción inicial de función cuadrática para estos alumnos, está relacionada de alguna manera con este tipo de problemas algebraicos con referencias gráficas, verbales e implícitas. De todas maneras, a pesar de este sentido práctico y funcional de la concepción original euleriana y de la aproximación discursiva y rigurosa de las definiciones iniciales de los alumnos, la casi totalidad de sus definiciones carecen de este sentido aplicado. Estas definiciones resultan ser poco operativas, desde un punto de vista didáctico y todas ellas tienen en común que están basadas en el poder de modelización que les confiere el lenguaje algebraico. Sin embargo, no consideramos nada

---

definida por una ecuación o gráfica.

extraño la fuerte tendencia hacia el conocimiento de origen reflejado en las definiciones iniciales de estos alumnos; como lo hemos podido observar anteriormente y como lo vamos a confirmar más adelante. Creemos que es lógico que unos estudiantes con un dominio de conocimiento experto sobre el tema que nos ocupa relativamente muy alto, tengan una mayor tendencia hacia sus conocimientos de origen.

Ahora bien, lo que sí podríamos considerar, críticamente desde un punto de vista didáctico, es que esta tendencia, influenciada por la formación de origen y el alto dominio de conocimiento experto, priva a estos estudiantes para profesores de incorporar otros matices, didácticamente más creativos, por ejemplo, matizaciones intuitivas (gráficas y visuales), prácticas y operativas (procedimentales) que motiven y faciliten la comprensión de estos conceptos matemáticos por parte de los estudiantes de secundaria. Seguramente, en cualquier momento previo a la realización de la tarea, estos sujetos han consultado algún libro de texto y, tal como lo señalan Lacasta y Pascual (1998), en la mayoría de los libros de texto de Educación Secundaria y en muchos libros de texto universitarios, "el estudio de las funciones se sigue mediante un esquema euleriano". En la Tabla 5.1 se muestran de manera esquemática y resumida los diferentes tipos de definiciones iniciales dadas por los sujetos del estudio empírico, con sus correspondientes índices de frecuencias. Se puede observar una predominancia aparente de las definiciones de tipo euleriana con referencias gráficas (57% en total) sobre las de tipo también euleriana sin referencias gráficas (43%), aunque entre las primeras predominan las con referencias gráfico-verbales (43%) sobre las propiamente gráficas o gráfico-visuales (14%).

Tabla 5.1.
Tipologías y frecuencias de definiciones iniciales

	Euleriana sin referencias gráficas	**Euleriana con referencia gráfica**	
		Verbal	**Visual**
Ana		✓	
Antonio	✓		
Isaías		✓	
Ma. Jesús			✓
Olga	✓		
Roberto	✓		
Rosario		✓	
Totales	**3 (43%)**	**3 (43%)**	**1 (14%)**

En la Tabla 5.2. se presentan los resultados del análisis lexicométrico (estadística textual) que realizamos con más detalle sobre la totalidad de definiciones iniciales. Para ello, tuvimos en cuenta los distintos ítems del contenido matemático en general y los relativos a los sistemas de representación algebraico y gráfico, en particular. Por **ítem** entendemos cualquier término o conjunto de términos conceptuales, cualquier propiedad o cualquier símbolo o signo de notación de carácter matemático incluido en alguna de las definiciones. Por ejemplo, los ítems relativos a la estructura conceptual de los tópicos del contenido matemático en la definición inicial de Rosario son los siguientes:

- "*función de 2° grado*",
- "*función cuadrática*",
- "$y=ax^2+bx+c$",
- "*gráfica de la función*", y
- "*parábola*".

Tres de estos ítems son relativos al sistema de representación simbólico algebraico (**SRA**): las dos expresiones verbales "*función de 2° grado*" y "*función cuadrática*" y la expresión simbólica "$y=ax^2+bx+c$"; y, dos son relativos al sistema de representación gráfica (**SRG**): "*gráfica de la función*" y "*parábola*". Estos dos ítems corresponden a expresiones verbales de carácter gráfico, es decir, no son ilustraciones propiamente gráficas visuales.

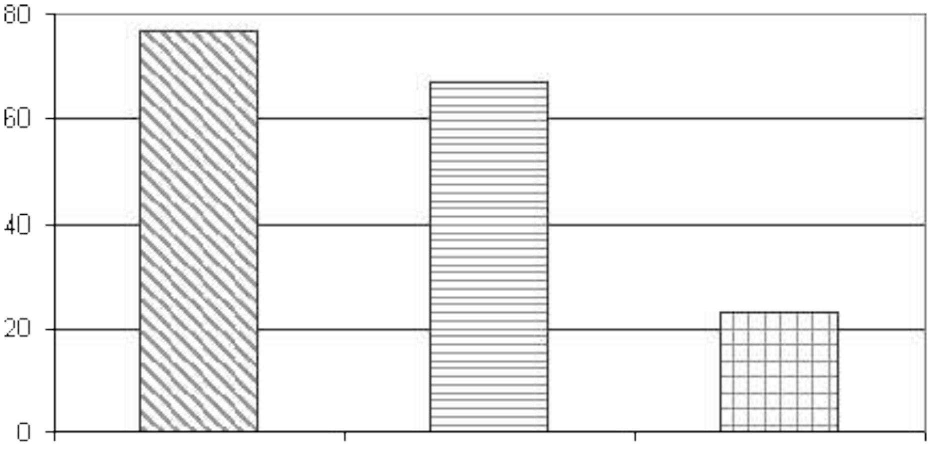
Tabla 5.2.
Número y tipo de ítems por sujetos

Sujetos	**Ítems relativos al CM en gral.**	**Ítems relativos al SRA**		**Ítems relativos al SRG**	
		Verbales	**Simbólicos**	**Verbales**	**Visuales**
Ana	7 (18%)	3	3	1	0
Antonio	8 (21%)	8	0	0	0
Isaías	7 (18%)	3	3	1	0
Ma. Jesús	8 (21%)	1	2	3	2
Roberto	4 (10%)	2	2	0	0
Rosario	5 (13%)	2	1	2	0
Totales	**39 (100%)**	**19 (49%)**	**11 (28%)**	**7 (18%)**	**2 (5%)**

La riqueza léxica del grupo clase con respecto a las definiciones iniciales está dada por el número de ítems utilizados por los alumnos participantes en el curso-taller, así: 39 ítems sobre el CM; de los cuales 30 (19+11) (77%) son relativos al SRA y sólo 9 (23%) son relativos al SRG. Observemos que a pesar del relativamente alto porcentaje de ítems sobre el SRA, solamente el 28% son de carácter simbólico, mientras que el 49% corresponden a ítems en lenguaje natural. Si sumamos los ítems verbales en los dos tipos de representación, entonces tenemos que el 67% corresponden al lenguaje verbal natural, frente a 28% para los simbólicos y sólo un 5% para los gráfico-visuales.

En la Figura 5.1 se puede observar gráficamente las diferencias proporcionales entre los distintos tipos de representaciones: en lenguaje natural (LN), algebraico (RA) y gráfico (RG), en relación con la totalidad de ítems referidos al CM. Se observa el mayor porcentaje de expresiones algebraicas (77%) y en lenguaje natural (67%) sobre las gráficas (23%). Al realizar un análisis similar pero individual (véase Tabla 5.2), encontramos que entre los dos sujetos con una mayor riqueza de ítems, uno de ellos, (Antonio, 21%), utiliza solamente ítems de carácter algebraico, pero exclusivamente verbal; mientras que la otra (María Jesús, 21%), presenta un mayor equilibrio entre los distintos sistemas de representación en juego (38% en algebraico y 63% en gráfico), aunque, manteniendo una ligera tendencia hacia lo verbal (50%) sobre los lenguajes estrictamente simbólico (25%) y visual (25%), más propios de la matemática convencional.

Figura 5.1.
Relación de ítems sobre la EC expresados en lenguajes algebraico (RA, 77%), natural (LN, 67%) y gráfico (RG, 23%) en las definiciones iniciales de los alumnos



Resulta interesante o curioso que los dos sujetos siguientes en el orden de mayor riqueza léxica (Ana, 18% e Isaías, 18%), también mantienen una mayor tendencia hacia el lenguaje algebraico (86%) y verbal (57% y 57%, respectivamente), frente a las representaciones simbólicas (43% y 43%, respectivamente) y gráfico-visual (0%). A continuación, vamos a documentar con el análisis de las definiciones finales, que el curso-taller impartido ha ejercido influencias sobre el grupo-clase; provocando cambios en el conocimiento didáctico relacionado con el contenido matemático sobre el que hemos trabajado, especialmente en la matización de la fuerte tendencia de los estudiantes para profesores considerados en su conjunto hacia el lenguaje simbólico algebraico y el lenguaje verbal natural.

5.2.2. Análisis de definiciones finales

Empecemos esta sección presentando la definición final dada por Ana:

> *El concepto de función cuadrática nos viene dada por la conjunción de dos estructuras, una algebraica $y=ax^2+bx+c$ y otra gráfica. La unión de ambas, tanto de lo algebraico a lo gráfico, como de lo gráfico a lo algebraico, desarrolla un concepto que ha de ser impartido en secundaria.*

Sin lugar a dudas, hay una variación apreciable en las concepciones de esta alumna. En la nueva definición, pone de manifiesto una comprensión sobre la naturaleza del concepto de carácter didáctico, al no identificar, como en su definición inicial, la definición formal de función cuadrática con su representación. Además, introduce matices que consideramos relevantes tanto por su contenido, ya que se refieren a ideas sobre la pluralidad de las representaciones en las que insistimos durante el desarrollo del curso, como por sus intenciones didácticas. Estamos hablando de la consideración que hace de la conveniencia de articular con reciprocidad, al menos dos sistemas de representación simultáneos, el algebraico y el gráfico y, por otro lado, formula su definición teniendo en cuenta los propósitos didácticos.

Otro alumno, Isaías, formula una definición final similar a la de Ana, también, significativamente diferente de su definición inicial. Por su parte, la alumna Rosario, también presenta una definición final muy distinta y mucho más interesante desde un punto de vista educativo. En todos estos casos, se pueden evidenciar los efectos del curso-taller impartido.

> *Una función de 2° grado, también denominada cuadrática, es una función de la forma: $y=ax^2+bx+c$, que también puede tener la forma, $y=a(x-h)^2+k$. Su gráfica es una parábola* (Rosario, Definición final).

La diferencia de la definición final con respecto a la inicial, consiste en que, seguramente ahora, esta alumna está pensando no solamente en la precisión y el rigor que se supone debe tener un enunciado matemático, sino también en la necesidad de comunicar las ideas de una manera más comprensible, con diferentes alternativas referenciales, al tratarse de definiciones con propósitos escolares. A pesar de que mantiene el esquema euleriano con referencia gráfica verbal de su definición inicial, claramente ha empezado a considerar que las expresiones algebraicas pueden variar sin que varíe la esencia del concepto. Por el contrario, está intentando mostrar, aunque lo hace implícitamente, que una variación dentro de un mismo sistema de representación permite visualizar mejor determinadas características y propiedades del concepto en cuestión. La forma algebraica $y=a(x-h)^2+k$, igualmente convencional como la forma estandarizada de la función cuadrática, permite visualizar directamente el vértice $V(h, k)$ de la parábola o gráfica de la función cuadrática correspondiente.

En nuestra opinión, el ideal de una definición escolar en Secundaria de un concepto matemático, es que además de expresarlo explícitamente, permita visualizar mejor lo que es esencialmente característico de dicho concepto. No que tenga como principal objetivo la economía léxica, simbólica y el rigor, como se acostumbra, razonablemente, en la disciplina matemática teórica. Otras definiciones finales, aunque muestran un enriquecimiento léxico y representacional, mantienen, como las de los alumnos y alumnas anteriores (Ana, Isaías y Rosario) la misma estructura euleriana, puesta de manifiesto en sus respectivas definiciones iniciales. Quizá, resulte interesante, por peculiar, mostrar la definición final de otro alumno (Roberto), quien a pesar de que enriquece terminológicamente el enunciado, no sólo mantiene el esquema euleriano inicial, aunque con un mayor énfasis en el lenguaje verbal natural, sino que reafirma estas ideas en el propio enunciado:

> *Las funciones son en definitiva objetos matemáticos que nos explican las relaciones o tipo de relaciones que existen entre dos variables. Pues bien, las funciones cuya ley es una expresión de segundo grado las denominaremos funciones cuadráticas* (Roberto, Definición final).

Las Tablas 5.3. y 5.4 que presentamos a continuación nos permitirán confirmar y validar de forma sintética las anteriores conclusiones sobre las tendencias generales de las definiciones del grupo de alumnos para profesores que participaron en el programa. Resultan particularmente relevantes los siguientes hechos: el enriquecimiento léxico y representacional, la introducción de algunos aspectos fundamentales tratados en el curso, especialmente los referidos a los organizadores del currículo en que se basó el diseño y desarrollo del programa y la introducción de consideraciones importantes referidas al conocimiento didáctico y a la formación didáctica de los futuros profesores de matemáticas de Enseñanza Secundaria.

Tabla 5.3.
Tipologías y frecuencias de definiciones finales del grupo-clase

	Euleriana sin referencias gráficas	**Euleriana con referencias gráficas**	
		Verbal	**Visual**
Ana		✓	
Antonio	✓		
Isaías		✓	
Ma. Jesús			✓
Olga	✓		
Roberto	✓		
Rosario		✓	
Total grupo-clase	**3 (43%)**	**3 (43%)**	**1 (14%)**

Al comparar esta tabla de tipologías y frecuencias con la correspondiente a las definiciones iniciales (véase Tabla 5.1.), observamos principalmente dos cuestiones. Que todas las definiciones finales siguen siendo básicamente de tipo euleriano y que hay un incremento a las referencias gráficas, aunque esta modificación solo sea mínima (de 3 a 4 alumnos) y de carácter estrictamente verbal (2 a 3 alumnos). De todas maneras, consideramos que esta variación es debida a la influencia del programa, ya que está referida a algunos de los aspectos en los cuales pusimos mayor énfasis durante la planificación e implementación: el tratamiento e interrelación de los diferentes sistemas de representación (SR) y algunos aspectos de la formación didáctica de los futuros profesores. De hecho, algunos alumnos (Ana, Isaías y Rosario) incorporan elementos relacionados con el tratamiento articulado de diferentes tipos de representación; y, además, algunos alumnos (Ana e Isaías) incorporan en sus definiciones cuestiones didácticas relacionadas con la enseñanza de los conceptos que están definiendo.

En la Tabla 5.4 se pueden observar con más detalles los resultados del análisis lexicométrico de la totalidad de definiciones finales, teniendo en cuenta, igual que en las iniciales (véase Tabla 5.2), los diferentes ítems relativos a la estructura conceptual (EC), y a los sistemas de representación algebraico (SRA) y gráfico (SRG). Además, hemos agregado una columna para los ítems relacionados con la enseñanza de estos tópicos. Dicha columna la denominamos de ítems relativos a la formación didáctica (FD).

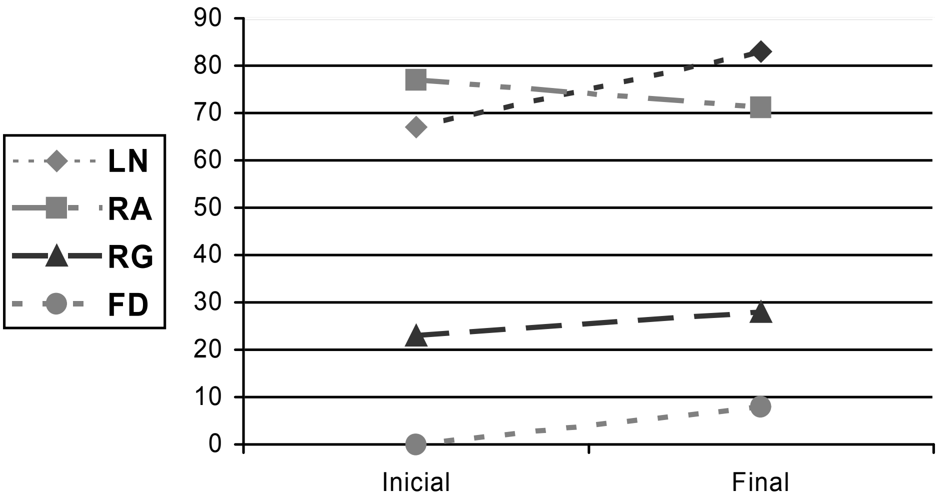
Tabla 5.4.
Número y tipo de ítems por sujetos en las definiciones finales

Sujetos	**Ítems relativos a la EC**	**Ítems relativos al SRA**		**Ítems relativos al SRG**		**Ítems relativos a la FD**
		Verbal	**Simbólico**	**Verbal**	**Visual**	
Ana	7 (14%)	4	1	2	0	2
Antonio	8 (16%)	8	0	0	0	0
Isaías	7 (14%)	4	1	2	0	2
Ma. Jesús	9 (18%)	1	2	4	2	0
Olga	6 (12%)	4	0	2	0	0
Roberto	6 (12%)	6	0	0	0	0
Rosario	6 (12%)	2	2	2	0	0
Totales	**49 (100%)**	29 **(59%)**	6 **(12%)**	12 **(24%)**	2 **(4%)**	4 **(8%)**

Como podemos observar, la riqueza léxica del grupo-clase en sus definiciones finales sobre la EC se ha incrementado con respecto a las iniciales, aproximadamente en un 20% (de 39 a 49). De estos, el 71% (29+6), corresponden al SRA y el 28% (12+2) al SRG. Al comparar esta tabla con la Tabla 6.2, correspondiente a las definiciones iniciales, observamos algunas diferencias que consideramos importantes de comentar, porque sugieren que ha habido algún tipo de modificación global en relación con el conocimiento sobre la EC, entre las fases inicial y final del programa. Una modificación relevante, que se presentó en dos alumnos (Ana e Isaías), se refiere a la introducción de una nueva columna de ítems de conocimientos relativos a la formación didáctica (FD). Estos dos alumnos introducen en sus definiciones finales indicaciones sobre la enseñanza y la comprensión del concepto que definen, relativas a la pluralidad e interrelación de los SR (véase la definición de Ana al comienzo de este apartado). Dicho de otra forma, construyen nuevos significados o significados más amplios de los conocimientos matemáticos escolares en cuestión, a partir de la integración simultánea en su propio modelo de otro de los elementos organizadores del currículo, en este caso los SR.

Por otra parte, también se observa un incremento de ítems relativos a las representaciones gráficas (SRG pasa del 23% al 28%); una importante disminución en el uso de representaciones simbólicas (del 28% al 12%); y un incremento en el uso del lenguaje natural (pasa de un 67% en las iniciales a un 83% en la finales). Recordemos que dos de las principales cuestiones en que se basó el diseño y desarrollo del curso-taller se referían al tratamiento de los diferentes SR y a la FD de los alumnos para profesores de matemáticas. La Figura 5.2 nos muestra gráficamente las modificaciones experimentadas por cada tipo de ítems componentes de las definiciones iniciales y finales. Se observa los incrementos de los ítems relativos al LN, SRG y a la FD, y la disminución del número de ítems relativos al SRA.

Figura 5.2.
Modificaciones de tipos de ítems entre las definiciones iniciales y finales



5.3. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS CONCEPTUALES

Los diagramas conceptuales nos han servido para identificar algunas de las ideas previas con que se enfrentaban los alumnos al contenido matemático propuesto, así como para detectar las principales modificaciones experimentadas una vez acabado el curso-taller de formación. Tanto al comienzo como al final de cada edición del curso, pedimos a los alumnos que presentaran la estructura conceptual del contenido matemático concreto a trabajar –funciones cuadráticas, trinomio de segundo grado y ecuaciones cuadráticas- mediante un diagrama conceptual.

Las unidades de información que tuvimos en cuenta para el análisis y comparación de los diagramas conceptuales fueron las siguientes:

- **Ítems:** Son los conceptos, nociones, propiedades, términos, expresiones, notaciones, símbolos matemáticos, etc., usados independientemente o asociados con otros en los mapas conceptuales. Individualmente considerados no consolidan una unidad semántica o proposición.

- **Nódulos:** Son aquellos ítems, conjuntos de ítems y enunciados que están relacionados con otros mediante algún conector (flecha o línea). Pueden estar o no dentro de algún óvalo o rectángulo. Un **nódulo** puede ser **simple** o **compuesto**, dependiendo de si consta de sólo un ítem o enunciado, o de más de uno, respectivamente (visualmente asociados con o encerrados en un óvalo, rectángulo o cualquier curva cerrada).

- **Conectivos relacionales:** Son las relaciones entre ítems representadas mediante líneas, flechas y/o ítems que unen o conectan dos o más ítems y/o nódulos para crear una unidad o relación semántica (con sentido o significado matemático) mediante algún tipo de expresión relacional.

- **Nódulos de primer orden:** Son aquellos que están conectados o relacionados directamente mediante alguna línea o flecha con solamente un elemento del diagrama correspondiente. A un nódulo de primer orden debe llegar y/o comenzar solo un camino.

- Las diferentes **tipologías** de diagramas conceptuales empleados por los alumnos tienen en común con la idea de “mapa conceptual” de Novak y Gowin (1988) que son una técnica de carácter objetivo, conceptual y proposicional que permite representar conceptos o estructuras conceptuales y establecer relaciones entre ellos mediante diagramas de árbol, organigramas sinópticos o diagramas poligonales. Específicamente, las tipologías de diagramas conceptuales (**DC**), en orden creciente de complejidad, son las siguientes:

- **DC.1:** Diagrama conceptual con forma de grafo poligonal cerrado y simple (Ana I, Antonio I y II, Ma. Jesús I, Roberto I).
- **DC.2:** Diagrama conceptual tipo diagrama de árbol (Isaías I)
- **DC.3**: Mapa conceptual con forma radial con un sólo foco (Irene I y II, Olga I).
- **DC.4:** Diagrama tipo organigrama sinóptico (Rosario I, II, Mª Jesús II y Olga II)
- **DC.5**: Diagrama conceptual mixto (combinación de dos o más tipologías) o con forma radial bifocal (Ana II, Isaías II y Roberto II).

Además, para el análisis y comparación de diagramas consideramos los siete criterios siguientes:

1. Elaboración de un listado con todos los ITEMS o unidades de información (hechos, conceptos, nociones, términos, notaciones, expresiones, enunciados, etc.) diferentes que aparecen en la totalidad de mapas conceptuales iniciales y finales presentados por los alumnos participantes.
2. Determinar el número de NÓDULOS de 1^er^ y 2º ORDEN, individual y globalmente que aparecen en los mapas conceptuales iniciales y finales.
3. Determinar el número de CONECTIVOS (RELACIONES) de 1^er^ y 2º ORDEN, individual y globalmente que aparecen en los mapas conceptuales iniciales y finales.
4. Determinar el número de CONECTIVOS UNIDIRECCIONALES Y BIDIRECCIONALES de 1^er^ y 2º ORDEN, individual y globalmente, que aparecen en los mapas conceptuales iniciales y finales.
5. Clasificar los diferentes mapas conceptuales iniciales y finales de acuerdo con posibles tipologías (cualitativas o visuales)
6. Analizar y evaluar los cambios observados entre el mapa conceptual inicial y el final de acuerdo con los indicadores anteriores.

7. Realizar la anterior evaluación por parte de los 3 investigadores y observadores y determinar índices de acuerdos (triangulación).

En el Anexo 6 se presenta una tabla con el listado total de ítems sobre el contenido matemático utilizados en los diagramas conceptuales por el conjunto de alumnos que participaron en el estudio empírico. El número total de ítems utilizados, así como los porcentajes correspondientes a las fases inicial y final, indica que, éstos alumnos no sólo utilizaron un léxico sobre el contenido matemático muy rico (71 ítems (100%) en total entre todos los alumnos, 46 (64%) en la fase inicial y 53 (75%) en la final), sino que, lo incrementaron en un 11% durante el desarrollo del curso-taller.

Un análisis en detalle de los ítems no repetidos pone de manifiesto que: de los 71 ítems, 16 aparecen en los mapas iniciales y no vuelven a aparecer en los finales, con la salvedad de que de estos 16, sólo el 7% fueron propuestos por más de un alumno, mientras que los incrementos en los finales para aquellos ítems que no aparecieron al comienzo fueron usados por más de un alumno en el 64% de los casos. La riqueza lexicográfica no supone una gran sorpresa si tenemos en cuenta que estos alumnos, por su formación de estudiantes de último curso de la carrera de matemáticas, poseen un gran dominio del conocimiento experto (conocimiento de los alumnos referido al contenido matemático específico sobre el cual trabajamos). Pero, esto mismo, permite considerar el hecho que este conocimiento se ha enriquecido o modificado con respecto al léxico, aunque sea en forma mínima, entre las fases inicial y final del curso-taller. Esta primera observación nos lleva a pensar que las modificaciones conceptuales experimentadas por los alumnos, y que se han puesto de manifiesto en la cantidad total de ítems utilizados en sus mapas conceptuales, no sólo confirman y complementan las modificaciones observadas en las definiciones iniciales y finales de función cuadrática previamente analizadas, sino que nos llevan a interesarnos por otros tipos de modificaciones conceptuales que se podrían detectar en los mismos mapas o diagramas conceptuales.

Las modificaciones del conocimiento suelen reflejarse en muchas ocasiones mediante la reestructuración o reorganización más que por un enriquecimiento terminológico o conceptual, propiamente dicho. Sobre todo cuando, por una parte, se trata de conocimientos que los alumnos dominan ampliamente y, por otra parte, la duración del curso es, como en nuestro caso, relativamente corta. Tanto el enriquecimiento lexicográfico como la reestructuración de las relaciones entre ítems de conocimiento suponen modificaciones en los esquemas conceptuales y significados de los diferentes tipos de conocimientos involucrados. En nuestro caso corresponden con los diferentes contenidos del modelo particular de los organizadores para el currículo: conocimientos sobre la **EC**, sobre los **SR**, sobre las **CG** y sobre la formación en didáctica de las matemáticas (**FD**)-.

Las unidades de información que hemos considerado más adecuadas para detectar modificaciones estructurales en el CM son las que de algún modo agrupan o relacionan las unidades más simples o ítems. Estas son los nódulos, los conectivos y las tipologías globales del diagrama conceptual.

5.3.1. Índice de elaboración de diagramas conceptuales

La tabla que presentamos a continuación (Tabla 5.5) nos muestra las relaciones de ítems, nódulos y conectivos relacionales totales utilizados por cada uno de los sujetos del estudio empírico, y los respectivos índices de elaboración (**IE**). En este trabajo definimos el **índice de elaboración** (**IE**) de un diagrama conceptual del siguiente modo:

$$\mathbf{IE} = \frac{\mathbf{n^o\ de\ ítems + n^o\ de\ nódulos + n^o\ de\ conectivos}}{\mathbf{n^o\ de\ ítems}}$$

De acuerdo con esto, tenemos que las principales unidades de información de la complejidad de elaboración de un diagrama conceptual son los nódulos y conectivos, junto con las tipologías gráficas. Al analizar esta tabla podemos comprobar nuestro supuesto sobre la variación positiva de las estructuras conceptuales de los alumnos, es decir, sobre el incremento de la complejidad estructural de su conocimiento conceptual reflejado en las variaciones de sus diagramas conceptuales. En casi todos los casos (sólo hubo dos excepciones, Antonio y Rosario), así como en la totalidad del grupo de alumnos, se comprueban modificaciones crecientes considerables. Así, por ejemplo, si consideramos primero las cifras totales del conjunto de alumnos (última línea de la tabla), observamos que, además del incremento lexicográfico o del número de ítems (24% con repetición, a diferencia del 13% sin repetición), el número total de unidades de información (nódulos y conectivos) de la complejidad del diagrama conceptual, tuvieron incrementos significativos del 54 y 67 por ciento, respectivamente. Como consecuencia de esto, los índices de elaboración también tuvieron un fuerte incremento.

Tabla 5.5.
Relación de ítems, nódulos, conectivos e índice de elaboración (IE) de los diagramas conceptuales (DC)

ALUMNOS	DC INICIALES				DC FINALES			
	ÍTEMS	NÓDULOS	CONECT.	IE	ÍTEMS	NÓDULOS	CONECT.	IE
Ana	7	4	4	**2,1**	14	14	13	**2,9** (38%↑)
Antonio	5	5	6	**3,2**	5	5	6	**3,2** (0%↑)
Irene	11	6	5	**2,0**	11	7	6	**2,2** (10%↑)
Isaías	16	11	9	**2,5**	14	14	13	**2,9** (16%↑)
Ma. Jesús	12	6	8	**2,2**	17	7	6	**1,8** (-18%↓)
Olga	13	7	6	**2,0**	15	10	9	**2,3** (15%↑)
Roberto	12	6	6	**2,0**	22	18	24	**2,9** (45%↑)
Rosario	16	7	5	**1,8**	16	5	5	**1,6** (-11%↓)
TOTALES	**92**	**52**	**49**	**2,1**	**114 (24%↑)**	**80 (54%↑)**	**82 (67%↑)**	**2,4 (14%↑)**

Todas estas observaciones quedan verificadas al calcular el tamaño del efecto ($T = \frac{\overline{X}_I - \overline{X}_F}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_I{}^2 + \sigma_F{}^2)}}$) correspondiente a las modificaciones, tanto de cada una de las unidades de información de la complejidad de los DC, como de los respectivos índices de elaboración global, tal y como se puede comprobar en la Tabla 5.7 que presentamos a continuación.

Tabla 5.6.
Tabla de comparaciones de unidades de información y de IE global de los DC

COMPARACIONES	TAMAÑO DEL EFECTO	DECISIONES
Ítems iniciales y finales	0.94	Sí diferencia
Nódulos iniciales y finales	0.62	Sí diferencia
Conectivos iniciales y finales	0.88	Sí diferencia
IE global inicial y final	0.91	Sí diferencia

Individualmente, también se pueden constatar resultados similares. La mayoría de los alumnos participantes (6 de 8, equivalente al 75%) experimentaron modificaciones positivas (incrementos). El incremento efectivo (no nulo) más bajo de unidades de información global agrupadas en el IE fue el de Irene, con un 10%, y los dos más altos, con una diferencia considerable, corresponden al de Roberto (45%) y Ana (38%), respectivamente.

5.3.2. Análisis de diagramas conceptuales según su tipología

Las modificaciones relativas al CM también se pueden apreciar cualitativamente al comparar visualmente las diferencias tipológicas de los respectivos diagramas conceptuales de cada uno de los alumnos participantes.

Las dos figuras siguientes (Figuras 5.3 y 5.4) nos muestran los diagramas conceptuales iniciales y finales de Irene y Ana, respectivamente . En el Anexo 4 se pueden observar los diagramas conceptuales de los demás alumnos participantes en el estudio empírico. En los dos casos se verifica visualmente el incremento de las unidades de información simples (ítems) y compuestas (nódulos y conectivos), así como en la tipología gráfica. Un hecho destacable es que las modificaciones estructurales detectadas constituyen introducciones de diferentes aspectos o elementos relacionados con la EC y los SR, constitutivos del modelo particular de los organizadores en que nos basamos para el diseño del curso-taller. Especialmente, en los diagramas finales se pone de manifiesto cierta tendencia a considerar e integrar diferentes SR. Aunque, en el caso de Irene, esto lo haga mediante referencias exclusivamente verbales (véase Figura 5.3).

Figura 5.3.
Diagramas conceptuales de Irene. Ejemplo de bajo nivel de modificación conceptual

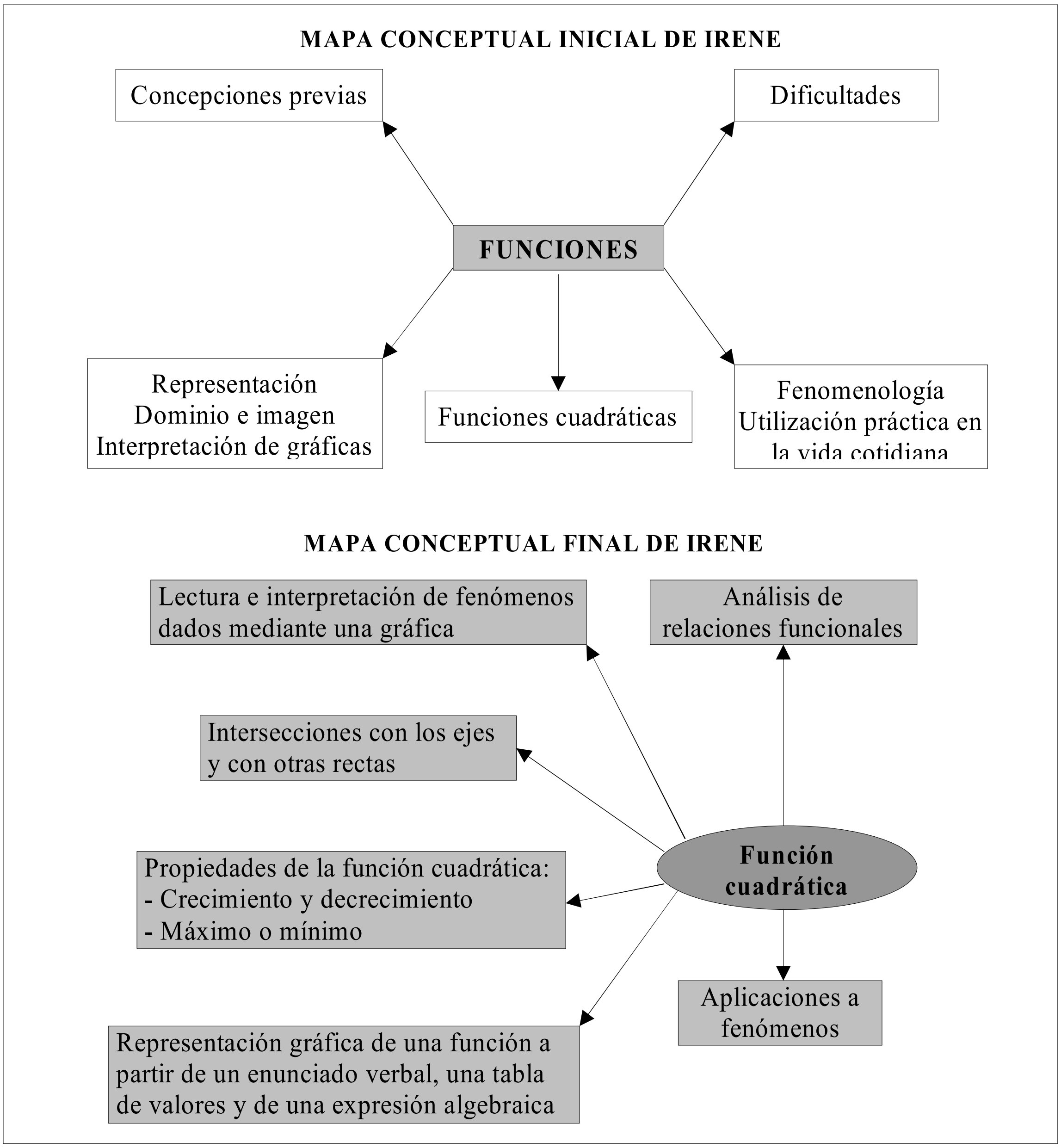
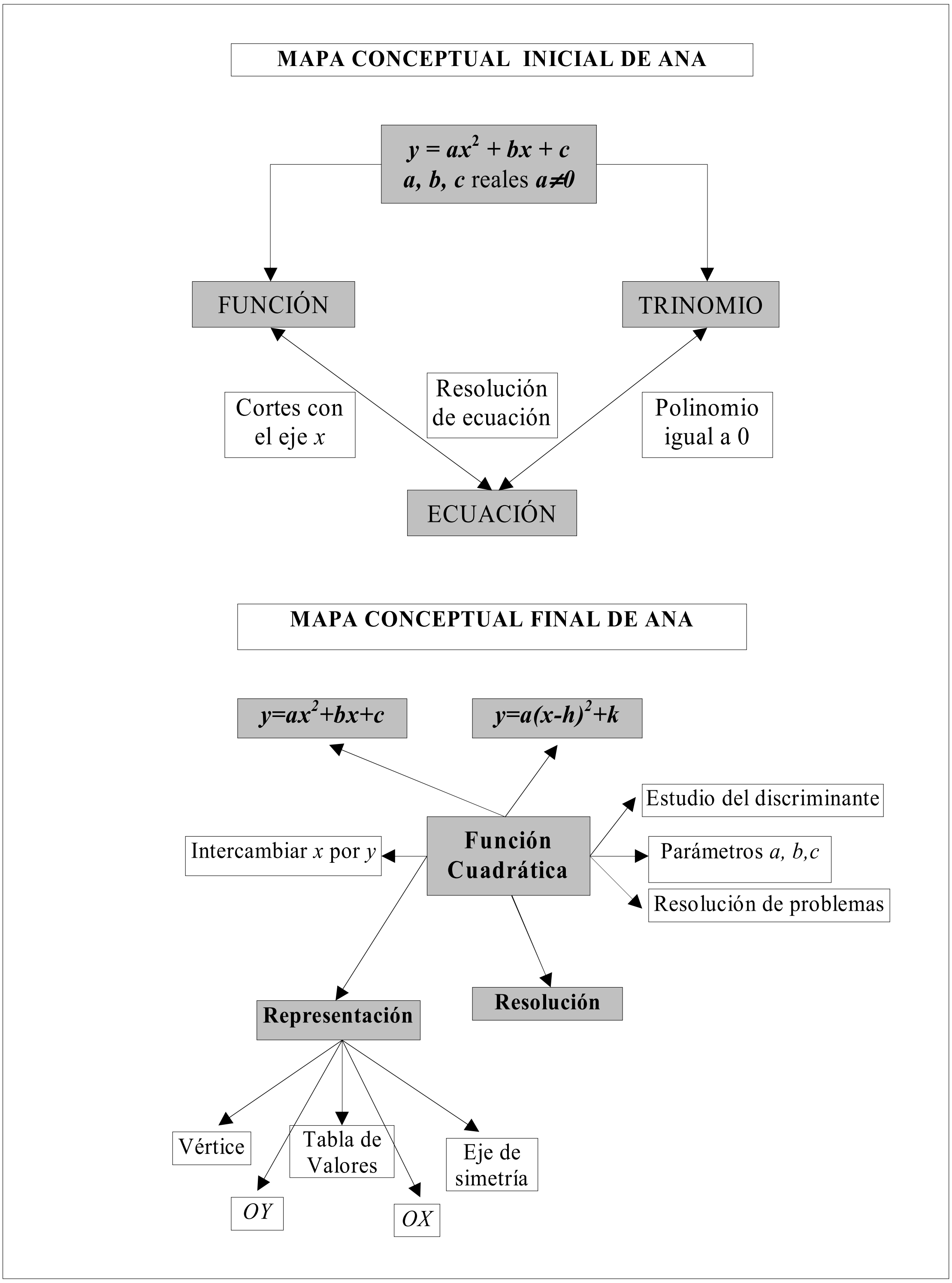


Figura 5.4.
Diagramas conceptuales de Ana. Ejemplo de alto nivel de modificación conceptual



El mayor incremento de la complejidad estructural del diagrama de Ana con respecto al de Irene, se observa al comparar sus diagramas (iniciales y finales). Estos no sólo presentan un mayor incremento de unidades de información simples y compuestas, sino que este incremento de complejidad también se refleja en las variaciones tipológicas. Mientras Irene se mantiene prácticamente en un mismo nivel intermedio de complejidad tipológica, pues sus dos mapas son de forma radial con un sólo foco, Ana pasa de la tipología más simple (diagrama poligonal simple) a la de mayor complejidad que hemos descrito como diagrama (mixto) radial con dos focos.

5.3.3. Análisis de la variación en las unidades de información compuestas

Los resultados sobre el enriquecimiento de la complejidad estructural global, puestos de manifiesto a través de los sucesivos diagramas conceptuales producidos en las dos fases inicial y final del desarrollo del programa, se ven reflejados y confirmados también al realizar un análisis más detallado sobre las variaciones de las unidades de información compuestas (nódulos y conectivos). Con el fin de explorar más a fondo la información suministrada por los diagramas presentados por los participantes durante las fases inicial y final del curso, clasificamos estas unidades en nódulos de primero y segundo orden, tal y como explicamos en la página 261. Los nódulos de primer y segundo orden los clasificamos a su vez en simples y compuestos y los conectivos en unidireccionales y bidireccionales.

Las dos tablas siguientes (Tablas 5.7 y 5.8) nos suministran información sobre este tipo de variación estructural, relativa a los nódulos de primer y segundo orden. En la segunda tabla, correspondiente a los diagramas finales, hemos agregado entre paréntesis los porcentajes respectivos de la variación global detectada entre la fase inicial y la final. La información global sobre los ítems está dada con repeticiones

Tabla 5.7.
Nódulo y conectivos de primero y segundo orden correspondientes a los diagramas iniciales

ALUMNOS	ITEMS	NÓDULOS				CONECTIVOS	
		PRIMER ORDEN		SEGUNDO ORDEN		UNIDIREC.	BIDIREC.
		SIMP.	COMP.	SIMP.	COMP.		
Ana	7	0	0	4	0	2	2
Antonio	5	0	0	5	0	3	3
Irene	11	2	3	1	0	5	0
Isaías	16	5	1	5	0	9	0
Ma. Jesús	12	1	0	5	0	7	0
Olga	12	3	1	3	0	5	0
Roberto	12	1	1	0	4	5	1
Rosario	16	4	2	0	2	4	0
TOTALES	**91**	**16**	**8**	**23**	**6**	**50**	**6**

Tabla 5.8.
Nódulo y conectivos de primero y segundo orden correspondientes a los diagramas finales

ALUMNOS	ITEMS	NÓDULOS				CONECTIVOS	
		PRIMER ORDEN		SEGUNDO ORDEN		UNIDIREC.	BIDIREC.
		SIMP.	COMP.	SIMP.	COMP.		
Ana	14	12	0	2	0	13	0
Antonio	5	1	0	4	0	3	3
Irene	9	4	2	1	0	6	0
Isaías	14	12	0	2	0	13	0
Ma. Jesús	8	3	2	0	2	6	0
Olga	10	4	0	6	0	6	2
Roberto	22	4	0	10	3	21	3
Rosario	17	0	2	0	3	5	0
TOTALES	**99**	**40**	**6**	**25**	**8**	**73**	**8**
Incremento i/f	8%	150%	-25%	9%	33%	46%	33%

Exceptuando la columna correspondiente a los nódulos compuestos de primer orden, la cual presenta un decrecimiento del 25%, en todas las demás columnas ha habido un incremento positivo. Lo anterior quiere decir que después del curso los participantes han mostrado una variación positiva de sus diagramas conceptuales; aunque relativamente baja con respecto al incremento de ítems simples (8%), pero muy alta con respecto a los detalles y complejidad, puestos de manifiesto con el incremento de las unidades de información de la complejidad o elaboración, tales como nódulos simples de primer orden (150%), nódulos simples de segundo orden (9%), nódulos compuestos de segundo orden (33%), conectivos unidireccionales (46%) y bidireccionales (33%), respectivamente.

5.3.4. Clasificación de diagramas conceptuales respecto a su tipología gráfica

Basándonos en criterios estrictamente gráficos o visuales, es decir, desde un punto de vista cualitativo, observamos que entre la totalidad de diagramas conceptuales (DC) iniciales y finales (16), los cuales describimos al comienzo de este apartado (5.3), se presentan cinco tipos diferentes (DC.1, DC.2, DC.3, DC.4 y DC.5), de los cuales solamente tres (los tres últimos) presentan diferencias significativas con respecto a su nivel de complejidad. La casi totalidad de los diagramas conceptuales elaborados por los alumnos del curso-taller son de contenido estrictamente conceptual ya que se refieren solamente a aspectos estructurales del conocimiento matemático referidos a la dimensión conceptual del mismo y no, por ejemplo, a la procedimental o actitudinal, ni a cuestiones representaciones diferenciadas (múltiples), ni didácticas. Excepto el diagrama inicial de Irene en el que integra o cita elementos propios del conocimiento didáctico, tales como "concepciones previas", "dificultades" de comprensión e interpretación y "utilización en la vida práctica" y "fenomenología".

Los diagramas tipo DC.1 (grafo poligonal) (Ana I, Antonio I y II, Roberto I) reflejan una organización conceptual del contenido basado exclusiva y estrictamente en la disciplina (Matemática). Mientras que los del tipo DC.2 (Isaías I), DC.3 (Irene I y II, Olga I) y DC.4 (Rosario I y II, Ma. Jesús II, Olga II), sin dejar de estar basados fundamentalmente en la disciplina, introducen algunos aspectos de conocimiento didáctico. Los diagramas del tipo DC.2 centran la presentación de las funciones cuadráticas en el concepto de función cuadrática, el cual está rodeado por los distintos elementos (características particulares, propiedades generales, notaciones y representaciones) que constituyen el dominio conceptual asociado con dicho concepto. Mientras que los diagramas conceptuales del tipo DC.3 privilegian una secuenciación creciente en complejidad, generalidad y detalles particulares del concepto general de función cuadrática.

Nótese que a pesar de la coincidencia general de tipologías, reflejada en el número relativamente pequeño de éstas, esto no significa que no haya habido variaciones tipológicas entre los diagramas conceptuales iniciales y finales. Solamente 3 de los alumnos conservaron el mismo tipo de diagrama al comienzo y final del curso (véanse los mapas conceptuales I y II de Antonio, Irene y Rosario). Obsérvese además, la tendencia de los alumnos a realizar diagramas conceptuales más complejos hacia la fase final del programa. Esta tendencia se observa a través de la mayor frecuencia del índice II que del I que acompañan los nombre de los sujetos. Estos hechos los interpretamos como que la consideración de un modelo integrador de la complejidad estructural y sistémica de los elementos organizadores del currículo relacionados directa y simultáneamente con el contenido matemático son causas potenciales de modificación enriquecedora de la complejidad de las estructuras matemáticas y de sus significados.

Teniendo en cuenta los indicadores de complejidad estructural y lexicográfica, así como los criterios y juicios de los miembros del equipo investigador y de los observadores expertos, clasificamos los diagramas conceptuales en tres niveles jerárquicos de complejidad, a saber: **bajo, medio y alto**. Consideramos diagrama de nivel de complejidad **bajo** aquellos que corresponden a la tipología DC.1. **Medio** a los que corresponden a las tipologías DC.2, DC.3 y DC.4. Y **alto** a los diagramas conceptuales radiales con al menos dos focos o los mixtos, como los de la tipología DC.5. Las Tablas 5.9 y 5.10 nos muestran la distribución de diagramas iniciales y finales por sujetos, de acuerdo con sus tipologías y niveles de complejidad, respectivamente.

Tabla 5.9.
Distribución de diagramas conceptuales por sujetos de acuerdo con las diferentes tipologías

SUJETOS	**TIPOLOGÍAS INICIALES**					**TIPOLOGÍAS FINALES**				
	DC.1	**DC.2**	**DC.3**	**DC.4**	**DC.5**	**DC.1**	**DC.2**	**DC.3**	**DC.4**	**DC.5**
Ana	✓									✓
Antonio	✓					✓				
Irene			✓					✓		
Isaías		✓								✓
Ma. Jesús	✓								✓	
Olga			✓						✓	
Roberto	✓									✓
Rosario				✓					✓	
TOTALES	**4**	**1**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**3**	**3**

En esta tabla podemos observar que el diagrama con mayor frecuencia de uso fue el tipo DC.1 (grafo poligonal cerrado), con una frecuencia de uso de 5 (4 en la fase inicial y 1 en la final). Esta tipología es la que hemos considerado de menor nivel de complejidad. La siguiente tipología con más frecuencia de uso fue la DC.4 (tipo organigrama sinóptico: 1 en la fase inicial y 3 en la final). Esta tipología la hemos considerado de un nivel medio de complejidad. Obsérvese nuevamente el incremento del nivel de complejidad tipológica entre las fases inicial y final, reflejado en la disminución sistemática del uso de diagramas con un nivel de complejidad bajo y el incremento de uso de diagramas de un nivel de complejidad medio y alto. Y en la tabla 5.10 siguiente podemos comprobar que en las dos fases inicial y final se mantiene la frecuencia de uso de diagramas de nivel medio de complejidad (4 en cada una de las dos fases), mientras que los de nivel bajo disminuyen de 4 a 1 y los de nivel alto aumentan de 0 a 3.

Tabla 5.10.
Distribución de diagramas conceptuales por sujetos de acuerdo con los niveles de complejidad

ALUMNOS	**NIVEL TIPOLOGÍA INICIAL**			**NIVEL TIPOLOGÍA FINAL**		
	BAJO	**MEDIO**	**ALTO**	**BAJO**	**MEDIO**	**ALTO**
Ana	⌣	-	-	-	-	⌣
Antonio	⌣	-	-	⌣	-	-
Irene	-	⌣	-	-	⌣	-
Isaías	-	⌣	-	-	-	⌣
Ma. Jesús	⌣	-	-	-	⌣	
Olga	-	⌣	-	-	⌣	-
Roberto	⌣	-	-	-		⌣
Rosario	-	⌣	-	-	⌣	-
TOTALES	**4**	**4**	**0**	**1**	**4**	**3**

5.4. CARACTERIZACIÓN DE LOS DIAGRAMAS CONCEPTUALES DE ACUERDO CON LAS DIMENSIONES DEL PROGRAMA

En el apartado anterior clasificamos los diagramas conceptuales de los sujetos del estudio empírico, de acuerdo con las unidades de información simples y compuestas, por sus tipologías y por sus niveles de elaboración. Con base en esto, iniciamos el análisis de las modificaciones de las estructuras conceptuales (EC) de estos sujetos. También, se podría haber hecho un análisis más fino sobre los niveles de complejidad, considerando otros sub-niveles entre las tipologías de nivel intermedio (DC.2, DC.3 y DC.4). En realidad este análisis lo hicimos pero no lo recogemos porque, a pesar que los resultados confirmaban los que habíamos obtenido previamente, no aportaban matices ni información nueva con respecto al proceso anterior.

En este apartado vamos a presentar los resultados del análisis complementario que hemos realizado sobre la valoración de las variaciones estructurales de los diagramas conceptuales, durante las fases inicial y final del estudio empírico. Las principales razones que nos han llevado a realizar este tipo de análisis en mayor profundidad tienen que ver con el hecho de que permite relacionar la información inferida del proceso de análisis anterior con respecto a tres de las cuatro cuestiones principales del estudio -los conocimientos sobre la EC, los SR y algunos aspectos relacionados con la formación didáctica (FD)-. Lo que haremos ahora consiste en integrar la información obtenida con nuevos datos que nos permitan dar cuenta de dichas cuestiones.

De acuerdo con esto vamos a considerar tres sistemas de categorías relacionadas respectivamente con las tres cuestiones centrales siguientes: conocimientos sobre la EC; los sistemas de SR y la FD. Obviamente, deben estar relacionadas con las distintas unidades de información de los correspondientes diagramas conceptuales. A partir del listado total de ítems sobre el contenido matemático (véase Anexo 6), hemos considerado las categorías generales y subcategorías de análisis que enunciamos a partir de la siguiente sección.

5.4.1. Categorías de análisis referidas a la estructura conceptual

Estas categorías se refieren a grupos de ítems o expresiones –verbales, “simbólicas” (algebraicas), gráficas o numéricas- que el alumno utiliza para referirse a cualquiera de las nociones relacionadas con el contenido matemático objeto de este estudio. Estos ítems pueden estar referidos a cualesquiera de los aspectos conceptuales, procedimentales, representacionales de alguna de estas nociones. Las categorías referidas al conocimiento sobre la EC son las siguientes:

* Concepto general de función

* Función polinómica de segundo grado (cuadrática).
* Trinomio de segundo grado
* Ecuación de segundo grado: Mención o expresión verbal o algebraica de la ecuación cuadrática, resolución de la ecuación, número y/o tipo soluciones.
* Propiedades analíticas de la función cuadrática: Continuidad, valores extremos, monotonía, dominio, recorrido, imágenes, etc.
* Propiedades geométricas de la función cuadrática: Intersecciones con los ejes, vértice, simetría, eje de simetría, forma de la gráfica (parábola), etc.
* Familias de funciones cuadráticas y de parábolas.
* Transformaciones geométricas: Translaciones verticales y horizontales, reflexiones horizontales y verticales, compresiones y dilataciones.
* Transformaciones algebraicas: Variación de parámetros *a*, *b* y *c*.

5.4.2. Categorías de análisis referidas a los sistemas de representación

Las categorías referidas a los sistemas de representación corresponden con cada uno de los sistemas de representación convencionales para las funciones, como son, el sistema de representación numérico (SRN), el sistema de representación gráfico (SRG), el sistema de representación simbólico-algebraico (SRA) y el sistema de representación en lenguaje natural técnico (matemático).

5.4.3. Categorías de análisis referidas a la formación didáctica

Las categorías referidas a aquellos aspectos que hemos venido denominando como conocimientos relacionados con la formación didáctica (FD), o sea, los conocimientos conceptuales o procedimentales sobre Didáctica de la Matemática que los futuros profesores tienen en cuenta para tomar decisiones curriculares y didácticas para la enseñanza y para realizar los distintos tipos de análisis didáctico son las siguientes:

* Consideraciones sobre el tratamiento de las dificultades y el error relacionados con el CM y basado en el uso de CG y los SR.
* Pautas de evaluación basadas en los tres elementos organizadores del currículo.

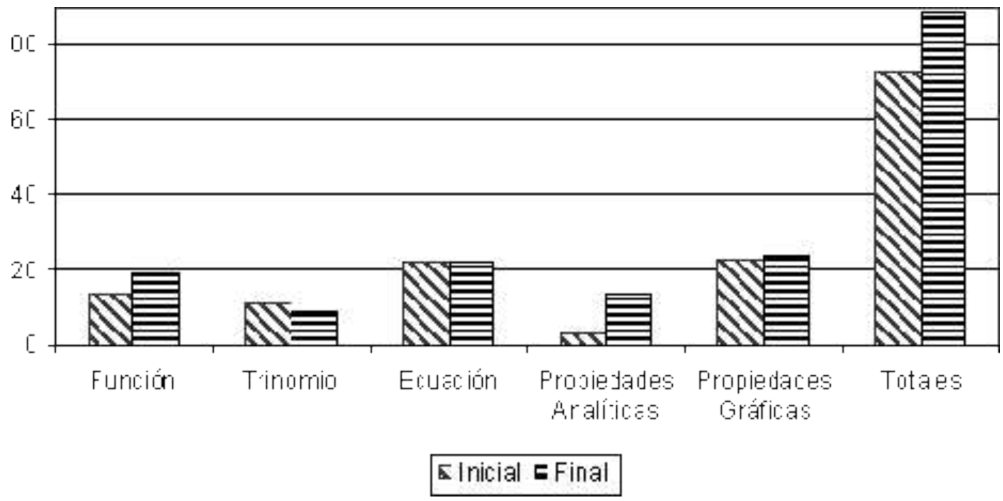
5.5. ANÁLISIS DE DIAGRAMAS CONCEPTUALES

Por el momento vamos a considerar los diagramas y sus modificaciones entre las fases inicial y final de acuerdo con los tres sistemas de categorías definidos anteriormente. Más adelante, cuando consideremos las modificaciones relacionadas con la utilización de los recursos tecnológicos, ampliaremos estos sistemas de categorías con un cuarto sistema relativo a este otro organizador.

5.5.1. Modificaciones de la estructura conceptual y los sistemas de representación

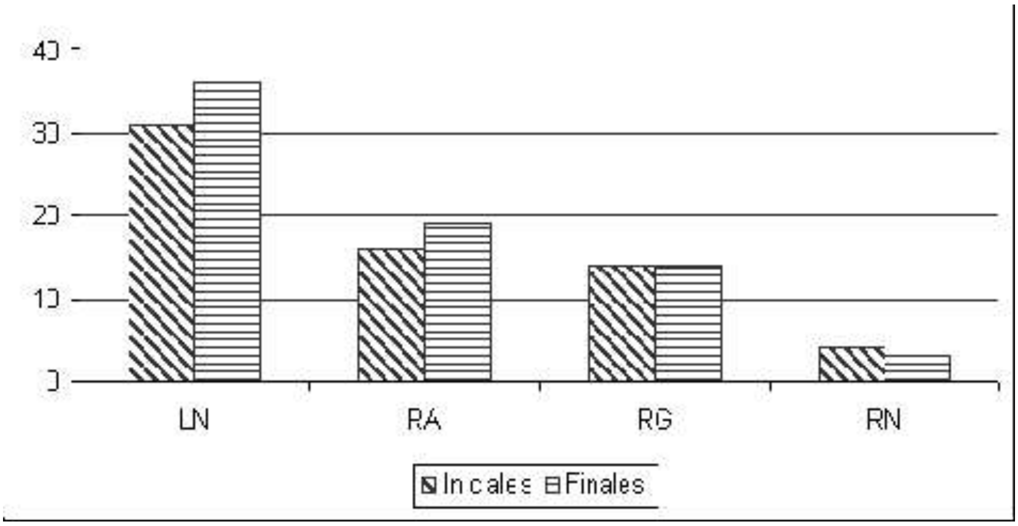
En esta sección vamos a considerar solamente los sistemas de categorías referidos a la estructura conceptual (EC) y a los sistemas de representación (SR) para determinar, con base en ellas, las variaciones detectadas en los diagramas conceptuales iniciales y finales. En el Anexo 6 presentamos un par de tablas en las que se muestran la relación total y variación de ítems utilizados en los diagramas conceptuales iniciales y finales por parte de cada uno de los sujetos del estudio empírico. Estos ítems se han agrupados de acuerdo con las diferentes categorías de análisis sobre e la EC y los SR . La Figura 5.5 que se presenta a continuación nos muestra de forma resumida esta relación y variación de ítems. En ella se puede observar que hay un crecimiento general de ítems: de 73 a 88 (del 21%), reflejados especialmente en los ítems sobre la función cuadrática (de 14 a 19, equivalente a un crecimiento de 36%) y sobre las propiedades algebraicas o analíticas de las funciones de segundo grado (que pasa de 3 a 14).

Figura 5.5.
Relación comparativa de números de ítems por categorías sobre el contenido matemático usados en los diagramas conceptuales iniciales y finales.



La figura siguiente (Figura 5.6) nos muestra la relación y variación de ítems organizados con respecto a las categorías y los distintos tipos de representación usados por parte de los alumnos en sus respectivos diagramas conceptuales. En el Anexo 4 se muestra una tabla con el listado total de ítems utilizados por todos los alumnos). Se han tenido en cuenta, aun con repetición, las expresiones en lenguaje natural (LN) de carácter gráfico (por ejemplo, expresiones como "*simetría de la parábola*"), simbólico-algebraico ("*trinomio de segundo grado*") o numérico ("*tabla de valores*"). En general, se observa que no han habido variaciones sustanciales del número de ítems por cada categoría. Se ha incrementado de 31 a 36 (16%) en el lenguaje natural (LN); de 16 a 19 (19%) en relación con el lenguaje algebraico (RA); el número de ítems sobre las representaciones gráficas se ha mantenido constante (14) y los ítems correspondientes al tratamiento numérico han disminuido de 4 a 3.

Figura 5.6.
Relación de ítems relativos a los sistemas de representación usados en los diagramas conceptuales iniciales y finales.



5.5.2. Variaciones con respecto a la formación didáctica

La formación didáctica (FD) no era uno de los aspectos a considerar para el análisis de los diagramas conceptuales producidos por los alumnos, sin embargo, como, por una parte, es una de las dimensiones de análisis y evaluación del programa y, por otra, una de las alumnas incluyó aspectos sobre esta en su diagrama inicial, nos permitimos incluir en esta sección breves comentarios al respecto. Concretamente, la alumna Irene incluyó en su diagrama inicial dos ítems relacionados con la FD (véase Figura 5.2). Estos fueron "*conceptos previos*" y "*dificultades de interpretación*" en relación con la función cuadrática y su gráfica. En general, entre las dimensiones o categorías de análisis subjetivas del programa hemos considerado unas referidas a la FD, o sea, a aquellos aspectos conceptuales o prácticos sobre conocimiento didáctico que los futuros profesores tienen en cuenta para tomar decisiones (realizar análisis) curriculares para la enseñanza de las matemáticas. En particular, los dos ítems considerados por esta alumna se refieren, respectivamente, a las siguientes categorías generales de análisis y evaluación del programa, en relación con la FD:

* Consideraciones sobre el tratamiento de las dificultades y el error relacionados con el CM y basado en el uso de CG y los SR.
* Pautas de evaluación basadas en los tres elementos organizadores del currículo.

Esta alumna, a pesar de ser la única que considera algunos aspectos en su diagrama conceptual inicial relacionados con la FD, no los incluye en su diagrama final, el cual rediseña o modifica, centrándose exclusivamente en aspectos relativos al conocimiento matemático y básicamente en lenguaje natural.

5.6. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

Las nuevas tecnologías informáticas de representación (NTR) con sistemas de representación múltiple y sistemas de cálculo simbólico (SCS) integrados, como las modernas calculadoras graficadoras (CG) con las cuales trabajamos (CG TI-83 y TI-92), junto con sus diferentes accesorios tecnológicos y materiales bibliográficos de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, han jugado un papel central en el diseño, planificación e implementación de los cursos-taller en los cuales se ha concretado nuestro programa de formación. Estos recursos tecnológicos junto con la cada vez mayor cantidad de literatura sobre sus utilidades didácticas permiten considerar un marco conceptual objetivo para planificar, desarrollar y evaluar la complejidad que conllevan los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en estos ambientes tecnológicos, y constituyen otro de los elementos en que se estructura el modelo parcial de los organizadores del currículo en el cual se centra y fundamenta la realización de nuestro programa.

Para la evaluación del programa en relación con la CG, consideramos las actitudes de los alumnos hacia la incorporación en el currículo de las utilidades didácticas de estas tecnologías (como recursos para la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión). Los instrumentos que hemos utilizado para recoger información han sido, básicamente, los siguientes: la prueba o escala de actitud; la encuesta de evaluación realizada al finalizar el curso-taller; y las producciones de los alumnos durante el desarrollo del curso.

5.6.1. Conocimientos sobre las utilidades didácticas de las calculadoras

Al empezar el curso-taller (estudio empírico), todos los sujetos participantes manifestaron no conocer ni haber tenido experiencia alguna con ninguna de las dos **CG** (TI-83 y TI-92) con las cuales nos disponíamos a trabajar (véase el Anexo 5 con la Encuesta de Actitudes). Durante el debate y reflexión conjunta realizados hacia el final de la primera sesión, la mayoría de ellos manifestaron que conocían muy poco sobre tecnologías, y menos como recurso de apoyo para la enseñanza de las matemáticas. Solamente algunos reconocieron haber utilizado, puntualmente, para realizar algún trabajo específico de matemáticas, los *software Matemática* y *Derive*. Así pues, todos los conocimientos y oportunidades para desarrollar algún dominio en el manejo de las calculadoras, tanto los que les ofrecimos, como los que ellos hubieran podido aprender durante el desarrollo del curso, los podemos considerar completamente nuevos para estos alumnos. Algo similar ocurrió durante las dos primeras ediciones del programa (ensayos pilotos 1 y 2), donde solamente se presentaron algunas excepciones en cada caso.

Como era de esperarse, en relación con el manejo y utilización de dichas tecnologías, estos alumnos alcanzaron satisfactoriamente las expectativas que nos habíamos propuesto al respecto; como eran, que conocieran y se familiarizaran con estas herramientas, y adquirieran las destrezas básicas sobre ellas, especialmente en relación con el contenido matemático específico y como recursos curriculares y didácticos. Esta consideración la hacemos con base en el hecho que todos realizaron la gran mayoría de las actividades que les propusimos durante el desarrollo de las sesiones y los resultados de las evaluaciones conjuntas que realizamos durante las distintas fases del programa entre todos los agentes (alumnos, investigadores, observadores y expertos).

Sin embargo, hay que reconocer que durante las 10 sesiones que duró el curso-taller, una por día, de 3 horas cada una y desarrolladas a lo largo de 23 días (entre el 22-03-99 y el 13-04-99), la incorporación por parte de los alumnos de la terminología propia de estas tecnologías y de la jerga respectiva relacionada con sus utilidades didácticas, es relativamente escasa. Esto se pone de manifiesto en sus intervenciones durante los diferentes debates y reflexiones conjuntas realizadas durante cada una de las sesiones, como se puede constatar en las transcripciones de las diferentes sesiones, y en particular la del debate conjunto realizado al final de la última sesión.

5.6.2. Evaluación de las actitudes hacia las calculadoras graficadoras

Tal y como lo hemos dicho anteriormente, nos interesa analizar las actitudes de los alumnos para profesores, participantes de este estudio, sobre la integración en el currículo y en el aula de estas tecnologías, como recurso o instrumento de apoyo para la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático. Las actitudes y creencias de los profesores de matemáticas sobre los distintos elementos que juegan algún papel relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han ganado un gran interés en las investigaciones sobre pensamiento y formación del profesorado en los últimos años. Un hecho ya constatado, es que los profesores de matemáticas cuando se plantean el problema de la enseñanza, bien en su fase de formación inicial, o bien en sus funciones profesionales de organización curricular y ejecución en el aula, ponen en funcionamiento todo un repertorio de creencias y actitudes que condicionan e influyen, tanto en su propio proceso de formación, como sus propias producciones y prácticas didácticas. El estudio de estas ideas puede enriquecer el diseño y planificación de los programas de formación de profesores y tener consecuencias positivas para la investigación educativa y el desarrollo curricular (Gutiérrez, 1997).

De acuerdo con Sarabia (1992, p. 137), el origen y modificación de las actitudes se produce en relación con los tres tipos de componentes siguientes, los cuales se considera que actúan interrelacionadamente:

- Componente cognitivo, referido a conocimientos, concepciones y creencias.
- Componente afectivo, referido a sentimientos y preferencias, y
- Componente conativo, referido a acciones manifiestas y declaraciones de

intenciones.

Uno cualquiera de estos componentes aislado no constituye una actitud. Como dice Sarabia (en documento citado), "las actitudes son experiencias de una cosa u objeto, una situación o una persona. Una creencia no es una actitud. Debe existir una referencia a algo o a alguien para que se genere una actitud". Además, las actitudes implican juicios evaluativos, positivos o negativos, favorables o desfavorables, agradables o desagradables, hacia una cosa, objeto, situación o persona. Las actitudes se expresan a través de verbalizaciones, opiniones, gestos y comportamientos. Estas características son las que permiten que las actitudes sean observables, detectables, predecibles y medibles.

5.6.3. La escala de actitudes

Para evaluar las actitudes de los futuros profesores de matemáticas que participaron en el programa diseñamos y utilizamos los siguientes instrumentos: una encuesta o **escala de actitudes**; y las grabaciones en cintas de vídeo y audio de las intervenciones de los alumnos durante el desarrollo de cada una de las sesiones del curso-taller.

La **escala de actitudes**, tipo Likert, fue diseñada y perfeccionada por el equipo de investigadores a lo largo de los distintos estudios (previos y empírico) y generaciones del programa. Uno de sus principales objetivos consistió en caracterizar y evaluar las actitudes de los profesores de matemáticas en formación inicial hacia las calculadoras graficadoras, consideradas como un elemento organizador dentro del modelo local-triádico que diseñamos para esta investigación. Para su diseño y desarrollo tuvimos en cuenta, como marco general, las cuatro cuestiones principales del estudio: la estructura conceptual (**EC**) referida al contenido matemático específico (**CM**), los sistemas de representación (**SR**), las calculadoras graficadoras (**CG**) como utilidades didácticas y algunos aspectos relacionados con el conocimiento didáctico (**CD**) y la formación didáctica (**FD**) sobre la enseñanza-aprendizaje de esta EC utilizando dichas tecnologías. En la encuesta de la escala incluimos preguntas tales como: *¿La integración de las CG en el aula de clase ayuda a los profesores a desarrollar mejor la enseñanza de las funciones? O, ¿el uso de la CG por parte de los estudiantes fomenta en ellos determinados aprendizajes de tipo* *mecánico?*

5.6.4. Construcción de la escala de actitudes: validez de contenido

Para el diseño y elaboración de la escala de actitudes inicialmente revisamos la literatura relacionada con el tema (Gairín, 1987; Izquierdo y Fortuny, 1996; Gutiérrez, 1997); consultamos algunas escalas de actitudes de profesores hacia las matemáticas (Auzmendi, 1992; Busquets, Fortuny y Gairín, 1996); consultamos las bases de datos ERIC y CICA; analizamos y evaluamos conjuntamente las encuestas aplicadas en las dos primeras ediciones del curso-taller y en otros trabajos anteriores; entrevistamos a expertos ("técnica Delphi") y realizamos producciones propias y específicas para este trabajo. Todos estos recursos constituyen fuentes de **validez del contenido** de la escala y de su estructura.

Basándonos en esta revisión de la literatura, así como en las cuestiones centrales del estudio, consideramos una serie de criterios categoriales para la selección de ítems sobre las actitudes de los profesores de matemáticas en relación con la integración de las **CG** en el currículo de matemáticas de Secundaria, a saber:

- Actitudes hacia las CG de carácter técnicas.
- Actitudes hacia las CG en relación con el CM (la CG como generador de actitudes más favorables hacia las matemáticas y como catalizador de representaciones múltiples).
- Actitudes hacia las CG en relación con los SR (pluralidad, coordinación, articulación, etc.)
- Actitudes hacia las CG en relación con la visualización y modelización (situaciones y nociones complejas, representación material y mental de objetos, relaciones y procedimientos matemáticos)
- Actitudes hacia las CG en relación con la FD y el currículo (las tecnologías como recursos y metodología de innovación y organización curricular).
- Actitudes hacia las CG en relación con la FD (la enseñanza de las funciones y las

matemáticas, enfoques o metodologías, interacción y gestión en el aula, consideración de las dificultades y errores, selección, secuenciación y temporalización, etc.).

- Actitudes hacia las CG en relación con el aprendizaje de las funciones y las matemáticas (ventajas, dificultades, construcción social, etc.)
- Actitudes hacia las CG en relación con la resolución de problemas sobre funciones (múltiples estrategias, simulación de situaciones, etc.)
- Actitudes hacia las CG en relación con las técnicas y procesos de evaluación (diversidad de opciones, participación interactiva, detección de errores y dificultades, obtención y revisión de información, etc.).

5.6.5. Sistema de categorías específicas para la escala de actitudes

A partir de este listado de criterios categoriales relacionados con el listado de ítems, y teniendo en cuenta las aplicaciones y evaluaciones en los estudios previos de la escala de actitud, así como las consultas a expertos, decidimos considerar los cuatro sistemas de categorías (teóricas) siguientes con sus correspondientes subcategorías: **Alumno-Aprendizaje**, **Profesor-Enseñanza**, **Contenido matemático** y **Curriculum-Evaluación**. Las denominamos teóricas para diferenciarlas de las categorías o dimensiones empíricas obtenidas mediante la técnica de análisis factorial. En la Figura 5.7 se presentan de manera resumida estas categorías y subcategorías con el listado de ítems de la escala de actitudes que corresponden a cada una de ellas. En el Anexo 5 se puede ver el cuestionario de la escala con el listado y enunciado total de ítems.

Figura 5.7.
Categorías y subcategorías de ítems de la escala de actitud

(i) Alumno – Aprendizaje (A-A):
Comprensión y aprendizaje: ítems n^{os} 4, 7, 8, 9, 19, 22, 23, 24, 25, 40. Motivación y trabajo: ítems n^{os} 3, 5, 30. Actitudes: ítems n^{os} 2, 21, 34.
(ii) Profesor – Enseñanza (P-E):
Utilidad didáctica: ítems n^{os} 1, 5, 6, 18, 28, 36, 40. Innovación: ítems n^{os} 12, 15, 37, 39. Inconvenientes o problemas: ítems n^{os} 28, 29, 31, 32.

(iii) Contenido Matemático (C-M):
Comprensión de nociones y procedimientos: ítems n^{os} 7, 8, 9, 17, 19, 23, 30, 35, 36. Aplicaciones y situaciones-problema: ítems n^{os} 10, 11, 40. Dificultades y errores: ítems n^{os} 33, 34.
(iv) Curriculum-Evaluación (C-E):
Curriculum: ítems n^{os} 16, 26, 27, 38, 39, 40. Evaluación: ítems n^{os} 13, 14, 20.

Complementariamente, y teniendo en cuenta las actuales caracterizaciones y conceptualizaciones cognitivas y didácticas sobre las actitudes en la literatura al uso, hemos considerado, tanto para el diseño como para el análisis de la escala, dos tipos globales de ítems, a saber: **actitudes con orientación positiva** hacia las CG y su integración en el currículo y la enseñanza de las funciones; y **actitudes con orientación negativa** hacia la CG y su integración en el currículo y el aula. Como se puede comprobar en la Figura 5.7 y en las Tablas 5.13 y 5.14, los ítems se distribuyen del siguiente modo: Para la primera categoría, **Alumno-Aprendizaje**, corresponden: seis ítems de orientación positiva (equivalente a un 37.5%); y 10 de orientación negativa (equivalente a un 42%); para la categoría **Profesores-Enseñanza**: siete ítems de orientación positiva (44%) y siete de orientación negativa (29%); para la categoría **Contenido Matemático**: 6 de orientación positiva (15%) y 8 de negativa (20%); y para la categoría **Currículo-Evaluación**: 4 de orientación positiva (10%) y 6 de negativa (15%).

5.6.6. Fiabilidad de la escala

Durante la fase de diseño del cuestionario de la escala de actitud, realizamos varios ensayos pilotos a efectos de realizar los ajustes necesarios y con el fin de lograr un grado de fiabilidad razonable del instrumento, el cual utilizaríamos definitivamente en el estudio empírico. Para ello, consideramos en el mismo cuestionario algunos enunciados de control, formulándolos paralelamente en positivo o afirmativamente y en negativo, como por ejemplo, los enunciados de los ítems 24: *Con las CG los alumnos no aprenderán a construir gráficas de funciones*; y 30: *Hoy en día las CG son necesarias para el estudio de las gráficas de las funciones*.

A efectos de poder introducir y procesar los datos en el paquete estadístico *SPSS 10*, hicimos las asignaciones numéricas a los diferentes tipos de respuestas dadas por los alumnos, tal y como se indica en la Tabla 5.11. Para los ítems de control, hicimos la asignación numérica de manera inversa.

Tabla 5.11.
Asignaciones numéricas a cada tipo de respuesta del cuestionario de actitud

Tipo de respuesta	Puntuación
TD: Totalmente en desacuerdo	1
D: Parcialmente en desacuerdo	2
N: Neutral (ni en desacuerdo ni de acuerdo)	3
A: Parcialmente de acuerdo	4
TA: Totalmente de acuerdo	5

En el Anexo 6 presentamos los resultados del análisis estadístico de fiabilidad, realizado mediante el test de escala *alpha* para los 10 sujetos en cada una de las fases inicial y final de aplicación del cuestionario de actitud y para los 40 ítems del mismo. En todos los casos el resultado de la fiabilidad de la escala fue superior a 0.8.

5.6.7. Análisis de los resultados de la escala por ítems

Para empezar, consideremos las frecuencias de respuestas de los alumnos a la encuesta en términos de los ítems de actitudes con orientación positiva y negativa durante las fases inicial y final del programa. En las siguientes tablas presentamos las frecuencias de respuestas dadas por los alumnos a los ítems de orientación positiva (Tabla 5.13) y de orientación negativa (Tabla 5.14). Las columnas encabezadas con **D**, **N** y **A** corresponden respectivamente con los siguientes tipos de respuestas: **D en desacuerdo** (total o parcialmente en desacuerdo); **N neutral** (ni en desacuerdo ni de acuerdo), y **A de acuerdo** (total o parcialmente de acuerdo).

La columna de la derecha indica si cada ítem ha tenido o no diferencia entre el comienzo y el final de acuerdo con los resultados de la prueba de contraste de signos de Wilcoxon aplicados a las medias de cada ítem y categoría (véase Anexo 6); para ello, se ha tomado como nivel de significación un valor de α=0,05, y aceptando como diferencias significativas entre los resultados iniciales y finales aquellos valores de $p \leq 0,05$.

Tabla 5.13.
Tabla de frecuencias de respuestas a los ítems de orientación positiva y contraste con nivel de significación α=0,05.

No.	ÍTEMS	INICIAL			FINAL			CONTRASTE
		D	N	A	D	N	A	
01	Las CG facilitan la enseñanza de las funciones			10			10	–
02	El uso de la CG permite a los estudiantes desarrollar actitudes favorables hacia las matemáticas.		1	9		1	9	–
03	La integración de la CG en el aula facilita el trabajo en grupo.		3	7		2	8	–
05	La integración de las CG en el aula ayuda a motivar más a los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas.		1	9		1	9	–
06	La integración de las CG en el aula ayuda al profesor a gestionar mejor la clase.		4	6	1	4	5	–
07	El uso de CG no complica aun más los procesos de comprensión matemática de los alumnos.	3		7		1	9	–
08	El uso de CG ayuda a comprender mejor cuestiones numéricas y gráficas de las funciones.			10			10	–
10	Las modernas CG facilitan la modelización y resolución de problemas sobre funciones.		3	7			10	–
12	Un profesor de matemáticas que se considere innovador debe incorporar las CG en el aula.		1	9		1	9	–
22	El uso de CG en el aprendizaje de las matemáticas permite desarrollar mejor la agilidad mental.		3	7	1	4	5	–
28	El uso de las CG en el aula permite fomentar más la interacción profesor-alumno.		5	5			10	**Sí diferencia**
30	Hoy en día las CG son necesarias para el estudio de las gráficas de las funciones.	3	2	5		1	9	–
33	Las CG ayudan a alcanzar un conocimiento mejor y más profundo de las matemáticas.		2	8		1	9	–
38	La introducción de las CG en el aula obliga a realizar cambios en el currículo de matemáticas de Secundaria.	4	1	5			10	**Sí diferencia**
39	Las CG constituyen un importante factor de innovación y cambio curricular en la Educación Secundaria.			10			10	–
40	En definitiva y globalmente mi opinión sobre las CG es que son positivas y favorables para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.			10			10	–
Total ítems categoría **Alumno-Aprendizaje**		**6**	**10**	**54**	**1**	**10**	**59**	–
Total ítems categoria **Profesor-Enseñanza**			**6**	**34**		**1**	**39**	–

Total ítems categoría **Contenido-Matemático**	**3**	**7**	**37**		**3**	**47**	**–**
Total ítems categoría **Currículo-Evaluación**	**4**	**1**	**25**			**30**	**Sí diferencia**

Tabla 5.14.
Tabla de frecuencias de respuestas a los ítems de orientación negativa y contraste con nivel de significación α=0,05.

No.	**ÍTEMS**	**INICIAL**			**FINAL**			**CONTRASTE**
		D	**N**	**A**	**D**	**N**	**A**	
04	El uso de las CG dificultan a los estudiantes la comprensión y aprendizaje del concepto de función.	8	2		8	2		–
09	El uso de CG dificulta más la comprensión de las expresiones simbólicas de las funciones.	4	6		8	2		–
11	Las funciones se pueden enseñar y aprender en profundidad sin necesidad de usar CG.		3	7	4	1	5	–
13	Al integrar las CG en el aula los profesores no tienen que modificar sus métodos de evaluación.	5	1	4	9	1		–
14	Aunque el profesor y los alumnos utilicen CG durante las clases, no se debería permitir usarlas en los exámenes.	6	1	3	6	2	2	–
15	Para enseñar funciones cuadráticas no son necesarias las CG.	3	2	5	3	2	5	–
16	Las CG son otra moda más de las que ocurren periódicamente en la Educación.	8	2		10			–
17	Las CG sólo se deberían usar para comprobar resultados obtenidos previamente con papel y lápiz.	9	1		10			–
18	En la enseñanza de las funciones las CG no deben sustituir el uso del papel y el lápiz.	3		7	4	1	5	–
19	Las CG fomentan determinados aprendizajes mecánicos.	3	5	2	3	3	4	–
20	Usando CG a los alumnos les resulta más fácil hacer trampas en los exámenes.	6	4		6	4		–
21	El uso de CG en el proceso de aprendizaje genera dependencia y pereza en los alumnos.	7	3		5	5		–
23	Las CG dificultan la comprensión conceptual de las funciones.	9	1		9	1		–
24	Con las CG los alumnos no aprenderán a construir gráficas de funciones.	8		2	8	2		–
25	Con las CG los alumnos no tienen necesidad de aprender a calcular tablas de valores.	5	2	3	7	3		–
26	Actualmente las CG no están suficientemente desarrolladas para su uso generalizado en el aula.	5	5		9	1		–
27	Actualmente el Sistema Educativo del país tiene muchas limitaciones de recursos para integrar las CG en el aula.		2	8	3		7	–

29	La incorporación de las CG en el aula incrementa de tiempo de trabajo del profesor.	2	1	7		2	8	–
31	Aprender a usar la CG constituye uno de los principales inconvenientes para el profesor.	2		8	6		4	–
32	Las CG constituyen un obstáculo o fuente de dificultad para enseñar matemáticas.	9		1	9		1	–
34	Usando CG los alumnos no toman conciencia de los errores que cometen al resolver problemas.	4	4	2	5	4	1	–
35	El uso de CG no favorece el desarrollo de destrezas algebraicas.	7	2	1	4	2	4	–
36	El conocimiento matemático escolar sigue siendo el mismo independientemente de las tecnologías que se utilicen para enseñarlo.	2		8	1	4	5	–
37	La integración de las CG en la enseñanza de las funciones no implica que los profesores tengan que modificar su manera de enseñarlas.	5		5	6		4	–
Total ítems categoría **Alumno-Aprendizaje**		**48**	**23**	**9**	**53**	**22**	**5**	–
Total ítems categoria **Profesor-Enseñanza**		**24**	**3**	**33**	**28**	**5**	**27**	–
Total ítems categoría **Contenido-Matemático**		**38**	**22**	**20**	**44**	**17**	**19**	–
Total ítems categoría **Currículo-Evaluación**		**30**	**15**	**15**	**43**	**43**	**19**	**Sí diferencia** (p<0,05)

Como se puede comprobar directamente en las dos tablas anteriores, los alumnos para profesor presentan un mayor índice inicial y final de actitudes favorables (tipo de respuestas A para los ítems de orientación positiva, Tabla 5.13 y D para los de orientación negativa, Tabla 5.14) hacia la integración y utilización de las CG en el currículo en relación con la primera categoría (teórica) **Alumno-Aprendizaje**: 54 en la columna A en la escala de actitudes inicial y 59 en la final en la Tabla 5.13 de ítems de orientación positiva; y 48 en la columna D de la escala inicial y 53 en la final de la Tabla 5.14 de ítems de orientación negativa. Complementariamente, las respuestas tipo D para esta misma categoria de ítems en la Tabla 5.13 y tipo A en la Tabla 5.14 no sólamente son significativamente inferiores, sino que además disminuyen entre las fases inicial y final (de 6 a 1 en las columnas D de la Tabla 5.13 y de 9 a 5 en las columnas A de la Tabla 5.14), mientras que las anteriores se incrementan ligeramente (de 54 a 59 en las columnas A de la Tabla 5.13 y de 48 a 53 en las columnas D de la tabla 5.14, respectivamente).

Este mismo tipo de análisis se puede hacer para las demás categorías teóricas y para cada una de las columnas de las dos tablas anteriores. Sin embargo, al calcular estadísticos de contraste (prueba del signo de Wilcoxon, véase Anexo 6), se comprueba que solamente se aprecian diferencias significativas entre los pares de ítems inicial/final 28 ("La CG permite fomentar más la interacción profesor-alumno") y 38 ("La incorporación de la CG en el aula obliga a realizar cambios en el currículo de matemáticas"). Ninguno de los restantes ítems han arrojado diferencias significativas. El interés de este trabajo se centra especialmente en los cambios provocados en el conocimiento didáctico de los sujetos (como veremos más adelante), y aunque se abordó un análisis específico de la escala, no es este el centro de interés prioritario de nuestro estudio.

Al aplicar estas técnicas de análisis a las categorías teóricas de ítems de actitudes se observa que la única que presenta diferencia o modificación significativa es la referida al **Curriculo-Evaluación**. La variación inicial / final de las medias de esta categoría (4.2; 4.7) es de un 12%, en la Tabla 5.13 y de un 11% para las medias (3.5, 3.9) en la Tabla 5.14, respectivamente). Lo que estos resultados indican es que básicamente es esta categoría (Currículo-Evaluación) la que influye sustancialmente en las modificaciones actitudinales de los alumnos para profesor. Esta categoría la podemos considerar incluida (parcialmente) en otra categoría más amplia que denominaremos (a partir de los resultados del análisis factorial de la escala) como de **Innovación curricular** con respecto a la incorporación de las CG en el aula y en la propuestas curriculares. Esta categoría de innovación curricular también incluye la categoría Profesor-Enseñanza. En los análisis factoriales de la escala aparecen claramente integradas estas dimensiones (véase pág. 289).

De todas maneras, tal y como lo hemos dicho en el Capítulo III, en este estudio somos conscientes que en general la modificación de las actitudes (en nuestro caso de los alumnos para profesor) son procesos lentos, que a veces requieren mucho más trabajo y tiempo del que a veces se tiene previsto:

> Los procesos de cambio de actitudes en general son procesos lentos que requieren una amplia movilización de dimensiones y componentes cognitivas en las personas y que además mantienen un estrecho paralelismo (correlación alta) con otra serie de dimensiones, entre ellas con el aprendizaje de conocimientos (Gutiérrez, 1997, p. 246).

También, compartimos la idea de otros autores de que el desarrollo de actitudes positivas y favorables hacia el conocimiento matemático, hacia un conocimiento apropiado de su didáctica (formación didáctica) y hacia los recursos y tecnologías que se utilicen para su enseñanza y aprendizaje es una condición necesaria y fundamental para un efectivo desarrollo didáctico profesional y del currículo. Teniendo en cuenta estas razones y premisas, y sin esperar modificaciones significativas, fué como nos propusimos explorar las actitudes de los alumnos participantes del programa en relación con la integración de las CG en el currículo y la enseñanza del contenido matemático en cuestión. No obstante, y en términos generales, hay que decir que los resultados organizados en las dos tablas anteriores, tal como los hemos analizados en este estudio, han puesto de manifiesto que, salvo situaciones, hechos, sujetos o grupos de sujetos muy particulares, estos alumnos mostraron, tanto al inicio del curso-taller como al final, ciertas actitudes (opiniones, posturas) favorables hacia las integración y utilización de las CG en el currículo y en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Secundaria. Por ejemplo, los resultados de los ítems 1 (*Las CG facilitan la enseñanza de las funciones*) y 40 (*En definitiva mi opinión sobre las CG es que son positivas y favorables para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*) son contundentes. En ambos, todos los alumnos manifestaron estar totalmente de acuerdo. Por otra parte, la participación y los trabajos intensos realizados durante el desarrollo de cada una de las sesiones del curso-taller, también corroboran esta conclusión.

5.6.8. Análisis factorial de la escala de actitudes

Con el fin de comprobar e intentar ampliar los resultados obtenidos mediante los análisis anteriores y de detectar posibles correspondencias entre grupos de ítems de actitudes decidimos realizar un análisis más exhaustivo de la escala mediante la técnica de análisis factorial. Los resultados generales de estos análisis pueden encontrarse en el Anexo 6, donde se incluyen las diferentes dimensiones o factores asociados a la escala y los respectivos pesos factoriales de cada una de las variables (ítems) en cada dimensión. El análisis factorial ha puesto de manifiesto que la escala tiene una estructura de cinco factores, con los cuales se explica el 60.85% de la varianza del total y, por ende, un porcentaje residual del 39,15%. Las dos dimensiones iniciales aglutinan la mayoría de las variables-ítems, y explican el 23,7% y el 13,2%, respectivamente, frente al 9,6%, 7,5% y 6,8% de las tres últimas, respectivamente. Las descripciones y conjunto de variables o ítems correspondientes a cada uno de estos factores o dimensiones empíricas son las siguientes:

Factores empíricos obtenidos a partir del análisis factorial de la escala de actitudes

Factor 1: Predisposición general hacia la integración y uso de las CG en el currículo y en el aula de matemáticas de enseñanza secundaria
Ítems: 1, 2, 4 a 10, 12, 14, 17, 20 a 23, 25, 26, 32 a 35 y 37.
Factor 2: Potencial de innovación curricular de las CG.
Ítems: 7, 13, 15, 22, 27 a 30, 35, 36, 38, 39.
Factor 3: Dificultades e inconvenientes instruccionales asociados al uso de la CG
Ítems: 6, 11, 19, 20, 31, 34 a 36.
Factor 4: Implicaciones de las CG para la enseñanza y comprensión de las funciones
Ítems: 3, 11, 15, 23, 24.
Factor 5: Inconvenientes y dificultades generales asociadas al uso de las CG (de carácter económico, formativo e institucional)
Ítems: 5, 16, 27, 3138.

Del mismo modo que lo hicimos con las dimensiones o categorías teóricas de la escala, aplicamos la prueba de contraste del signo de Wilcoxon a estas cinco dimensiones empíricas (véase Anexo 6). Esta prueba muestra que solamente ha habido un cambio significativo en el Factor 2 (Potencial innovador curricular respecto a la CG), con un nivel de significación de 0.047 (que de todas maneras está muy próximo a 0.05). De alguna manera, esto indica que los alumnos para profesor mostraron una mayor sensibilidad hacia las posibilidades de innovación curricular de la tecnología. Este resultado también refuerza el que se obtuvo en el apartado anterior cuando aplicamos la prueba de contraste paramétrico a las medias de las categorías teóricas de ítems de actitudes.

Ahora bien, del mismo modo que con las modificaciones estructurales del conocimiento conceptual, estudiado anteriormente mediante las definiciones y los diagramas conceptuales, las modificaciones detectadas, aunque no muy fuertes, constituyen comprobaciones concretas de los efectos positivos esperados con respecto a la planificación del curso en relación con los sujetos que participaron en el curso-taller. Algunos otros hechos a destacar en este sentido son los siguientes. Objetivamente, hay un mayor porcentaje de modificaciones de ítems de actitudes negativas (54%) que de positivas (31%). Las modificaciones de las actitudes positivas suponen un mejoramiento de éstas, puesto que las tendencias ya eran de actitudes positivas al comenzar el curso. Véanse las modificaciones de los ítems 10, 28, 30 y 38. Por ejemplo, el ítem 10: *Las CG facilitan la modelización y resolución de problemas sobre funciones* (Tabla 5.14); pasa de una frecuencia de 3 que no están ni de acuerdo ni en desacuerdo y 7 que están de acuerdo a un 10 absoluto que están de acuerdo. Este tipo de resultado es doblemente positivo porque, además de mantener y desarrollar una actitud favorable hacia las CG y los contenidos del curso, se logra uno de los objetivos relacionados con la comprensión y aceptación de la pluralidad de los sistemas de representación (SR), la modelización y la tecnología como recursos organizadores y mediadores para la resolución de situaciones-problema sobre el contenido matemático.

Sin duda, y como lo hemos reconocido anteriormente, también hay actitudes negativas o desfavorables al comienzo del curso-taller, y aunque muchas de estas se modifican a través del desarrollo de este, algunas se mantienen y hasta se reafirman. Sin embargo, hemos detectado que hay una mayor movilización de actitudes negativas sobre las positivas o favorables, la mayoría de estas actitudes son debidas a las creencias, preconcepciones y desinformación de los alumnos acerca de las utilidades de las CG en relación con los diferentes tópicos matemáticos tratados. Muchas de estas creencias y preconcepciones se mantienen e incluso se reafirman porque, junto con el tipo de conocimiento matemático dominante, forman un sistema de ideas (concepciones) lo suficientemente fuertes como para poder llegar a ser modificadas positivamente a través de un curso-taller de las características (duración, ritmo, contenido, objetivos) como el que hemos impartido.

Algunos de estos hechos que acabamos de mencionar las podemos ilustrar con los siguientes ejemplos sobre los resultados obtenidos. El ítem 9: *El uso de la CG dificulta más la comprensión de las expresiones simbólicas de las funciones*. Es un ítem de actitud negativa, correspondiente a las categorías (i) Alumno-Aprendizaje, y (iii) Contenido-Matemático. Aceptar este enunciado es más un producto de creencias y convicciones infundadas que de un conocimiento y comprobación empírica, para lo cual se requeriría experiencia y formación. Con la experiencia e información obtenida durante el desarrollo del curso-taller, este grupo de alumnos pasan de 4 y 6 que están en desacuerdo y dudosos, respectivamente, a 8 que están en total desacuerdo y sólo 2 permanecen con dudas al respecto. Un comentario análogo lo podríamos hacer sobre el ítem 13 (*Al integrar las CG en el aula los profesores no tienen que modificar sus métodos de evaluación*), relativo a las pautas de evaluación con (o sin) CG.

En cambio, los resultados del ítem 29 (*La incorporación de las CG en el aula incrementa de tiempo de trabajo del profesor*), muestran una reafirmación de este tipo de creencia y no consideran que independientemente del tiempo que se debe invertir para alcanzar el conocimiento y dominio básicos necesarios de una nueva herramienta, esto les supondría una mejora considerable, cualitativamente e incluso con respecto al tiempo, de sus posteriores procesos de enseñanza y aprendizaje. Este resultado se refuerza con el del ítem 31 sobre el problema de aprender a usar las tecnologías por parte de los profesores. Al comenzar el curso, 8 (80%) de los alumnos se mostraron de acuerdo, mientas que al final sólo 4 (40%) se mostraron de acuerdo con este enunciado y 6 (60%) opinaron estar en desacuerdo.

Creemos conveniente aclarar que a pesar del número relativamente pequeño del grupo de alumnos participantes, todos estos resultados se han mantenido y confirmado como una tendencia a lo largo de las ediciones anteriores (2 estudios piloto con 25 y 13 sujetos, respectivamente) del programa. Además, estos resultados los debemos asumir como indicadores de evaluación del programa concreto que nos ocupa. Es decir, no pretendemos que estos resultados sean generalizables directamente, sin adaptación previa, a una muestra o población más amplia, ni a ningún otro programa de formación de profesores. Un estudio más detallado de los cambios singulares de cada uno de los sujetos (o grupos de sujetos con características comunes) implicados en el programa se presenta en los apartados siguientes.

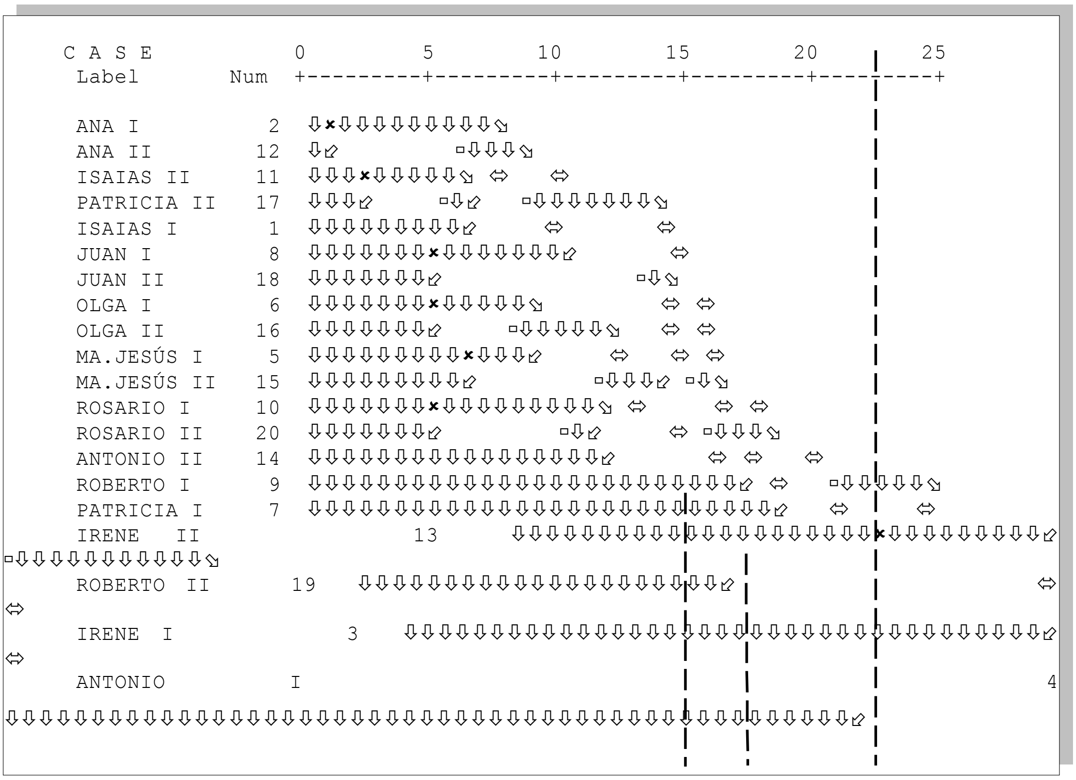
5.6.9. Análisis *cluster* de los resultados de la escala de actitudes

El análisis de las diferencias entre resultados de las aplicaciones inicial y final de la escala de actitud, confirma que no ha habido una modificación global sustantiva de las actitudes de los alumnos para profesores que participaron en el estudio empírico, lo cual se interpreta como que no se han generado cambios globales significativos en relación con la integración y utilización curricular de las CG en propuestas para la enseñanza del contenido matemático que nos ocupa. Sin embargo, el análisis detallado de las diferentes categorías de la escala de actitud, mediante el cálculo estadístico "*tamaño del efecto*" y mediante la prueba de contraste no paramétrico de Wilcoxon, han mostrado que sí se han generado cambios de actitudes, aunque sutiles, con respecto a algunas de estas categorías y subcategorías de análisis. De ahí el interés de completar el estudio anterior con esta nueva técnica de análisis en la que destacan las actitudes de los sujetos. Estos resultados no nos han sorprendido mucho porque, como ya hemos dicho, la mayoría de estos alumnos mostraron tener actitudes favorables hacia estas tecnologías desde el comienzo del curso. Al fin y al cabo han aceptado participar en el curso-taller por su propia decisión y voluntad. Así que sus expectativas, igualmente favorables en la mayoría de los casos, los ha llevado a confrontar positivamente algunos indicadores de actitudes negativas que todavía conservaban, debido a las creencias, a la desinformación y a la necesaria o razonable precaución ("reflexividad crítica") que se debe tener frente a un tipo de tecnología innovadora, compleja y desconocida para ellos.

Por otra parte, los análisis estadísticos multivariantes (*factorial*, *cluster* y de *escalamiento multidimensional*), por sujetos y por variables, han producido una información empírica general bastante útil para realizar otro tipo de análisis subjetivo. Estos análisis han servido para definir tipologías de alumnos participantes en el programa. Estos primeros estudios y caracterizaciones de **tipologías de alumnos para profesor** los complementaremos y presentaremos en el Capítulo VI, a modo de síntesis integrada de los distintos tipos de análisis que hemos realizado en el estudio. De todas maneras, adelantamos algunos resultados preliminares que hemos obtenido mediante análisis *cluster* y de *escalamiento multidimensional*. Para no generar confusión entre los análisis de este capítulo y los que presentaremos en el siguiente, denominaremos como agrupamientos o conglomerados (*cluster*) a los diferentes conjuntos o grupos de alumnos para profesor que se han obtenido como resultado de estos análisis descriptivos, y reservamos el término **tipologías** para las caracterizaciones que haremos en profundidad posteriormente en el Capítulo VII, en el que tendremos en cuenta no sólo los resultados de estos análisis descriptivos, sino también las otras técnicas de análisis cualitativo del diseño del estudio.

El dendograma que mostramos en la Figura 5.7 corresponde a las aplicaciones inicial y final de la escala de actitudes. Hemos decidido aplicar la técnica de análisis *cluster* a las escalas de actitudes conjuntas a efectos de observar no sólo relaciones intersubjetivas posibles sino también probables relaciones intrasubjetivas (los análisis parciales de los agrupamientos inicial y final separadamente, aparecen en el Anexo 5).

Figura 5.7.
Dendograma correspondiente a las aplicaciones inicial y final de la escala de actitud



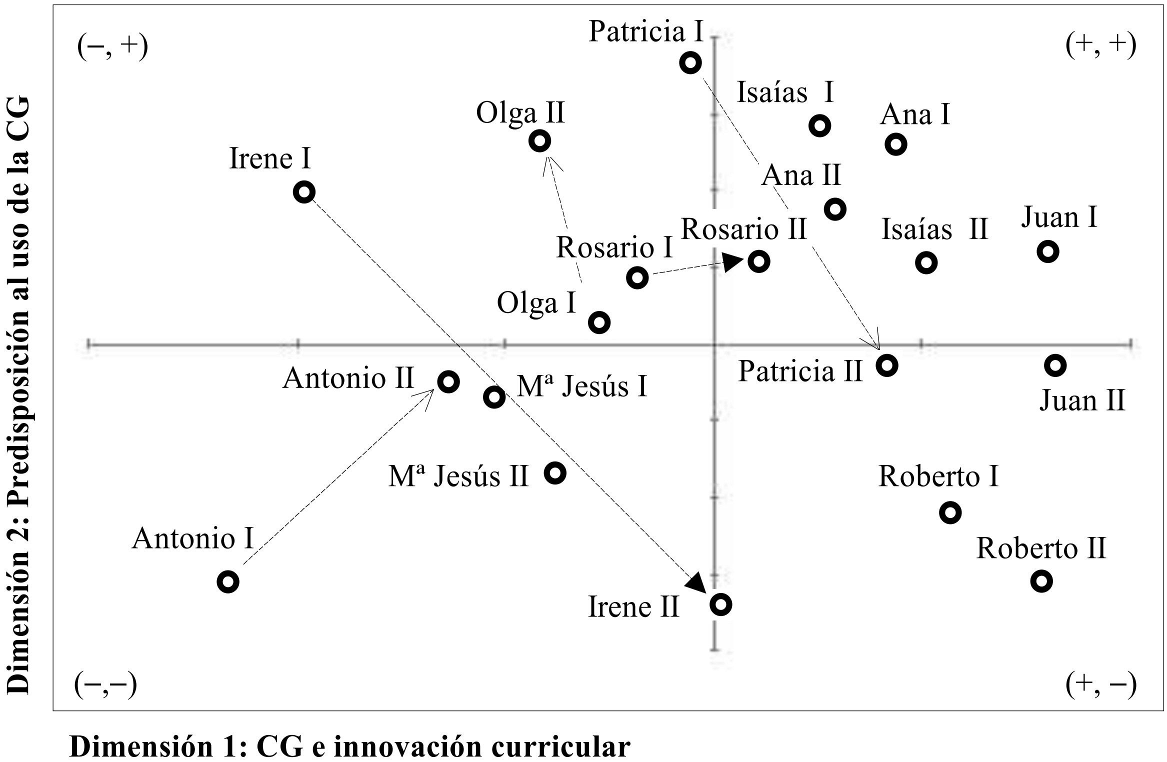
En el dendograma anterior se pueden observar dos agrupamientos globales de profesores en formación. Un primer grupo o conglomerado (*cluster*) representado por **C.1** integrado por el alumno Antonio I y otro que denotaremos por **C.2** conformado por todos los demás sujetos. En este último conglomerado podemos diferenciar dos subgrupos, uno integrado por Irene I (que denotamos por **C.2.1**) y otro formado por el resto de sujetos (**C.2.2**). También podemos considerar un tercer subgrupo específico (**C.2.3**) integrado por Irene II, Patricia I y Roberto II. En principio, estos resultados se pueden interpretar como que las actitudes iniciales tienen un gran peso o una gran fuerza en los sujetos, sean estas favorables o no y, además, tienden a reafirmarse antes que a modificarse. Más precisamente, el dendograma permite inferir la tendencia de los profesores en formación a no modificar significativamente sus actitudes, al menos durante el tiempo de desarrollo del curso-taller. Observemos cómo una buena parte de los alumnos (50%), tendieron a mantenerse agrupados o relacionados consigo mismo con respecto a las actitudes que evalúa la escala. A la luz de los resultados de otras investigaciones sobre actitudes hacia el conocimiento matemático y hacia el uso de tecnologías en la Educación, esto no resulta extraño, pero, sí resultan interesantes los casos de los alumnos Irene, Patricia, Antonio y Roberto, que se han agrupado en *cluster* diferentes en cada una de las fases de aplicación del cuestionario (véanse *cluster* inicial y final en el Anexo 5). Este hecho indica que ha habido algún tipo de movilización actitudinal con respecto a los contenidos de la escala (integración y uso de la CG en el currículo y en el aula). En el próximo capítulo mostraremos e intentaremos explicar más ampliamente a partir de los análisis cualitativos de las producciones individuales de los alumnos que estas modificaciones no son iguales de significativas para todos ellos.

5.6.10. Análisis por *escalamiento multidimensional* de la escala

Un análisis gráfico más explícito de la escala de actitudes lo ofrece el *Escalamiento Multidimensional* (véase Figura 5.8). De acuerdo con los resultados de este análisis consideramos dos dimensiones como referencias para el agrupamiento de los sujetos: una primera dimensión (correspondiente al eje de las abscisas) denominada "**CG e innovación**

curricular", referida a las actitudes hacia la integración de las CG en el currículo de matemáticas de secundaria; y una segunda dimensión (correspondiente al eje de las ordenadas) denominada "**predisposición al uso de las CG**" en la enseñanza-aprendizaje del contenido matemático en secundaria. Este análisis, con unos valores muy aceptables de bondad de ajuste del modelo (*stress*=0,03 y RQS=0,99), nos permite inferir que atendiendo a estas dos dimensiones solamente han habido cambios significativos en las actitudes de dos alumnos –Irene y Patricia–, aunque también se observan cambios parciales relativos a alguna de las dos dimensiones en Rosario y Juan. Irene y Patricia, que pasan del cuadrante II al IV, son un prototipo de alumnos en que los cambios se han producido con mayor intensidad en relación con la segunda dimensión (predisposición al uso de la CG). Esto indica que, con respecto a las actitudes, al inicio del programa estas dos alumnas tenían cierto potencial de innovación curricular y al finalizar pusieron de manifiesto una actitud conservadora o tradicional con respecto a la integración de la tecnología en el currículo. Estas dos alumnas también experimentaron un cambio positivo, aunque con menor intensidad que el anterior, en relación con la segunda dimensión relativa a la "predisposición al uso de la CG". Por ejemplo, obsérvense las variaciones con respecto a los ejes de coordenadas en la Figura 5.8, cuando Irene (Patricia) se traslada de Irene I (Patricia I) a Irene II (Patricia II).

Figura 5.8.
Análisis gráfico por *escalamiento multidimensional* de la escala de actitudes



En la misma podemos observar también que Rosario ilustra un tipo de alumno para profesor en el que el cambio se produce principalmente en sentido horizontal (con respecto a la dimensión representada en el eje de las abscisas). O sea, esta alumna experimenta un cambio positivo (de desfavorable a favorable) en su predisposición al uso de la tecnología. A los cuatro agrupamientos (uno por cada cuadrante, aproximadamente) que produce este tipo de análisis gráfico los vamos a denominar: **C-I, C-II, C-III** y **C-IV**, respectivamente. De acuerdo con esto tenemos que en el primer cuadrante (grupo **C-I**, con signos de coordenadas (+, +)) están agrupados los alumnos para profesor: Ana I, II; Isaías I, II, Juan, I, II, Rosario II y Patricia II; en el segundo cuadrante (grupo **C-II**, signos (–, +)) están las alumnas Irene I, Olga I, II, Patricia I y Rosario I; en el tercer cuadrante (grupo **C-III**, signos (–, –)) está los alumnos: Antonio I, II; Mª Jesús I, II e Irene II; y en el cuarto cuadrante (grupo C-IV, signos (+,–) el alumno Roberto I, II.

Curiosamente, los contrastes no paramétricos, prueba del signo de Wilcoxon, (véase Figura 5.9) han certificado el cambio de cuadrantes (de Irene y Rosari) que hemos descrito anteriormente, puesto que estas dos alumnas son las únicas que han arrojado diferencias significativas en el contraste de sus medias. En ambos casos se han obtenido valores inferiores a p=0.05. En estos casos, p_1=p_2=0.01 para estas dos alumns, respectivamente. El resto de alumnos arroja valores superiores a 0.05, no siendo, por lo tanto, significativos sus cambios de actitud medidos con esta escala; de hecho, podemos observar que los valores iniciales y finales de cada uno de ellos se mantuvieron en el mismo cuadrante sin que se observen modificaciones.

Figura 5.9.
Prueba del signo de Wilcoxon de contraste no paramétrico (α=0,05)

	SUMA I SUMA F	ISAIAS I ISAÍAS F	ANA I ANA F	IRENE I IRENE F	ANTON.I ANTON.F	Mª JES. I Mª JES. F	OLGA I OLGA F	PATRI. I PATRI. F	JUAN I JUAN F	ROBER.I ROBER.F	ROSA I ROSA F
Est. de contraste	.004	.159	.670	.011	.339	.239	.665	.114	.077	.860	.011

El caso de Antonio merece atención especial; en él no se aprecia un cambio de cuadrante, si bien hay una mejora relativa con respecto a su posición inicial que era muy distante al grupo en general y además sube, aunque permaneciendo en su grupo inicial. Dicha posición también fue puesta de manifiesto en los análisis *cluster* anteriores.

5.6.11. Balance del análisis de los agrupamientos

En la Figura 5.10 se muestra de manera resumida la distribución de los alumnos para profesor en función de cada uno de los agrupamientos o conglomerados obtenidos en la distintas fases inicial (F-I) y final (F-F) de aplicación de la escala de actitudes, a partir de las técnicas de análisis *cluster* y de *Escalamiento Multidimensional*, respectivamente.

Figura 5.10.
Distribución por fases (F-I y F-F) de alumnos para profesor en función de los agrupamientos (*cluster*) y cuadrantes (*escalamiento multidimensional*).

ALUMNOS	**Análisis *Cluster***			***Escalamiento Multidimensional***			
	Fase inicial	**Fase final**	**Cambio**	**Fase inicial**	**Fase final**	**Cambio innovación**	**Cambio predisposi.**
Ana	C.2.2	C.2.2	No	C-I (+,+)	C-IV (+,+)	No	No
Antonio	C.1	C.2.2	Sí	C-I (-, -)	C-IV (-, -)	No	No
Irene	C.2.1	C.2.2	Sí	C-II (-, +)	C-II (-, -)	Sí	Sí
Isaías	C.2.2	C.2.2	No	C-I (+, +)	C-III (+, +)	No	No
Juan	C.2.2	C.2.2	No	C-IV (+, +)	C-III (+, -)	No	Sí
Ma. Jesús	C.2.2	C.2.2	No	C-III (-, -)	C-I (-, -)	No	No
Olga	C.2.2	C.2.2	No	C-II (-, +)	C-I (-, +)	No	No
Patricia	C.2.2	C.2.3	Sí	C-I (-, +)	C-III (+, -)	Sí	Sí

Roberto	C.2.2	C.2.2	No	C-IV (+, -)	C-II (+,-)	No	No
Rosario	C.2.2	C.2.2	No	C-II (-, +)	C-IV (+,-)	Sí	No

Los cinco casos, digamos especiales con respecto a los cambios de conglomerado o dimensión entre las fases inicial y final del programa, que se observan en esta figura, corresponden a los alumnos Antonio, Irene, Patricia, Juan y Rosario. Por ejemplo, se observa que Irene y Patricia han experimentado cambios totales, tanto en relación con los agrupamientos del análisis *cluster*, como con las dimensiones del análisis de *escalamiento multidimensional*. Los otros tres alumnos (Antonio, Juan y Rosario) han experimentado cambios parciales. Antonio cambia sólo de conglomerado; Juan cambia con respecto a la predisposición hacia el uso de la tecnología y Rosario cambia con respecto al potencial de innovación curricular. A través de los análisis cualitativos que realizaremos posteriormente en (Capítulo VI) tendremos la oportunidad de contrastar estos cambios y de documentarlos con mayor detalle.

Los demás alumnos (50%), de acuerdo con los análisis realizados, mostraron y mantuvieron entre las fases inicial y final del programa una predisposición favorable y un potencial innovador en relación con las propuestas curriculares y tecnológicas que se hicieron durante las fases de implementación del programa y de desarrollo del curso-taller.

Las reflexiones anteriores nos permiten concluir que el programa generó en los estudiante para profesor que participaron en él alguna modificación actitudinal hacia la integración y uso de la tecnología; pero, estas modificaciones, solamente fueron significativas en dos sujetos, Irene y Rosario, como se puede observar en las Figuras 5.8 y 5.9. De todas maneras, estos dos alumnos corresponden a un 20%. Y aunque el programa no consiguió modificaciones actitudinales favorables en aquellos alumnos que mostraron una predisposición desfavorable, de todas formas consiguió mantener y afianzar la predisposición favorables en aquellos alumnos para profesor (70%) que desde el inicio mostraron tener este tipo de predisposición. Teniendo en cuenta estos resultados relativos, como por ejemplo los de las medias iniciales y finales de los ítems con orientación positiva (Tabla 5.13) y de orientación negativa (Tabla 5.14), las cuales tuvieron ligeros incrementos del 7% y 6%, respectivamente, nos hacemos preguntas sobre cuales aspectos del curso-taller son necesarios modificar, de tal forma que la predisposición favorable tenga un mayor incremento y la desfavorable disminuya. Uno de estos factores a considerar sería el tiempo de duración, ya que además de la gran densidad de contenidos (matemático, tecnológico y didáctico) , el ritmo de desarrollo de las sesiones fué muy fuerte, tanto para los profesores como para los estudiantes. A pesar de esto, tuvimos que dejar para trabajar en casa varias de las actividades que estaban programadas para ser resueltas durante las sesiones de clases. Al finalizar el curso, el 80% de los estudiantes manifestaron que el tiempo de la segunda parte del curso, dedicado a la calculadora TI-92 fue insuficiente. Consideramos que en un curso de mayor tiempo de duración (por lo menos tres o cuatro sesiones más de tres horas cada una) se podrían llegar a conseguir mejores resultados en el sentido de la resolución demostrativa y efectiva de las actividades que no se alcanzaron a resolver en clase.

5.6.12. Conclusiones sobre la evaluación de las actitudes hacia la tecnología

A modo de conclusiones de este apartado sobre las actitudes hacia el uso e integración de las CG en el currículo de matemáticas de Secundaria, podemos afirmar lo siguiente:

1. Que todos los alumnos para profesores de matemáticas participantes en el programa, incluso los que manifestaron tener algunas dudas al respecto antes y durante el desarrollo del curso-taller, opinaron o reconocieron verbalmente que las CG se debían utilizar para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de algunas de las nociones de la EC sobre el contenido matemático propuesto en el curso-taller.

2. A pesar de la opinión favorable hacia la tecnología, algunos de estos alumnos para profesor, los del agrupamiento tipológico PF.1, mostraron tener inicialmente una predisposición desfavorable hacia la integración y uso de la CG en el currículo y aula de matemáticas de Enseñanza Secundaria, mientras que otros, los del agrupamiento PF.2, demostraron tener una predisposición favorable al respecto.

3. Por otra parte, a pesar del diseño, planificación e implementación del programa, basado en las utilidades tecnológicas y didácticas de las CG con las cuales trabajamos, hubo alumnos para profesores, los del conglomerado PF.2, que mantuvieron una resistencia al uso e integración de dichas tecnologías en el currículo y el aula de matemáticas de Enseñanza Secundaria.

4. La mayoría de los alumnos mantuvieron durante todas las fases del programa una predisposición favorable al uso e integración de la CG en el currículo de matemáticas de Secundaria. Aunque, en realidad, muy pocos, (solamente tres, 30%) demostraron en la práctica una predisposición efectiva hacia la utilización de esta tecnología en sus propuestas didácticas (como lo mostraremos en el siguiente apartado y lo explicaremos con más detalle en el próximo capítulo).

5. Y, finalmente, la mayoría de los alumnos para profesores (70%) que participaron en el estudio empírico (tercera generación del programa), pusieron de manifiesto que las actitudes iniciales hacia las tecnologías, sean éstas favorables o no, tienen un gran peso para ellos y cambian relativamente muy poco o nada, al menos durante el tiempo de duración y la experiencia del curso en el cual se concretó nuestro programa.

5.7. ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS RELATIVOS A LA FORMACIÓN DIDÁCTICA

Los conocimientos de orden curricular y didáctico relacionados con la formación de los futuros profesores de matemáticas de Enseñanza Secundaria, y que nosotros hemos venido denominando como aspectos sobre la **formación didáctica** (**FD**), forman parte de nuestro modelo local de los organizadores para el currículo de matemáticas, en el cual se basa nuestro programa de formación inicial de profesores. Como sabemos, uno de los objetivos principales de este estudio consiste en analizar y evaluar las modificaciones del conocimiento didáctico de los alumnos participantes en el programa, mostrando como estos alumnos utilizan estos conocimientos en sus propuestas didácticas sobre la estructura conceptual (EC) asociada con el contenido matemático que nos ocupa.

El conocimiento matemático lo consideramos desde una múltiple perspectiva, conceptual, procedimental y actitudinal, y basado especialmente en la pluralidad de posibilidades de representación y tratamiento de éstas, y en los recursos y utilidades didácticas que ofrecen las nuevas tecnologías con opciones de representación múltiple y sistema de cálculo simbólico integrado, como las modernas CG con las cuales hemos trabajado. Al conjunto de estos diferentes pero, complementarios tipos de contenidos y modos de utilizarlos, es lo que denominamos en este trabajo los distintos aspectos de la **formación didáctica** (**FD**) que nos preocupan. En general, la **FD** es el conocimiento didáctico y la experiencia didáctica sobre los organizadores del currículo, que los alumnos para profesor utilizan y aplican para realizar los distintos tipos de análisis didácticos que son necesarios para diseñar, planificar, desarrollar y evaluar los distintos tipos de actividades didácticas estructuradas en unidades didácticas para la enseñanza, aprendizaje y evaluación de un tópico o estructura matemática concreta, bien en la práctica natural o en la de laboratorio.

Aunque las fuentes de toda formación didáctica provienen de la Didáctica de la Matemática en general, en este trabajo consideramos la **FD** subjetiva (relativa a los alumnos para profesores participantes del programa) y local (referida al contexto y contenidos específicos en que se ubica el estudio). La información sobre el conocimiento didáctico (**CD**) de los alumnos de un plan de formación determinado, que se pueda obtener como resultado de una indagación empírica de este tipo, es de vital importancia para el plan mismo, para la formación de los futuros profesores y para los responsables de esta formación (los formadores), ya que en este tipo de conocimiento se fundamentará su práctica profesional posterior. Sin embargo, somos conscientes de que esta información es parcial y contextualizada en relación con unos alumnos concretos, con un currículo, con unos tópicos de contenido y con unos organizadores particulares previamente seleccionados. Precisamente, nuestro propósito en esta sección consiste en caracterizar el conocimiento didáctico de los alumnos para profesores inscritos en el programa y evaluar las modificaciones que han experimentado durante su implantación, con respecto a distintos aspectos del modelo de los organizadores del currículo en el cual se basa dicho programa

En trabajos sobre el pensamiento y el conocimiento del profesorado de matemáticas (Marcelo, 1987; Llinares y Sánchez, 1990; Fennema y Franke, 1992; Thompson, 1992; Rico y Gutiérrez, 1994; García, 1996; Flores, 1998; Rico, 1998*b,c*, 1999), a éste se le concibe, desde un punto de vista socioconstructivista, como un profesional reflexivo, que usa y pone a prueba teorías personales para planificar, desarrollar y explicar su enseñanza. En este trabajo subscribimos esta concepción del profesor o del futuro profesor de matemáticas de Educación Secundaria y consideramos que una parte de los elementos y aspectos cognitivos (teóricos, prácticos y teórico-prácticos), constitutivos del CD del futuro profesor de matemáticas, se pueden poner de manifiesto o detectar a través de sus propias propuestas y producciones en sus diseños de actividades, unidades didácticas y tareas de evaluación, así como con las opiniones y comentarios formulados en los debates y reflexiones conjuntas, planificadas y estructuradas con tal propósito. De acuerdo con esto, los instrumentos y técnicas que hemos utilizado para determinar y evaluar el CD de los alumnos para profesor y sus modificaciones han sido los siguientes: tareas inicial, intermedias y final; cuadernos de trabajo de los alumnos; transcripciones de los casetes de vídeo y audio con las grabaciones de las sesiones (organizadas en episodios, momentos y protocolos); la observación participante y las reuniones de evaluación de los integrantes del equipo de investigadores.

En esta sección estamos interesados en aspectos muy concretos del conocimiento didáctico (CD) de los futuros profesores, complementarios de las cuestiones actitudinales y conceptuales, de las cuales nos hemos ocupado en apartados anteriores. Concretamente, en este apartado nos proponemos describir los aspectos más relevantes del CD de los alumnos para profesor que a lo largo del desarrollo del curso-taller han sufrido alguna modificación, o bien no la han tenido a pesar de nuestros presupuestos, expectativas e intervenciones. En este caso, nos interesaremos por los factores que pueden generar esta resistencia al cambio. Analizamos los protocolos de las distintas producciones (tareas, intervenciones y comentarios) de los alumnos tomando como referencia las diferentes tipologías de futuros profesores anteriormente consideradas. A partir de estos resultados y teniendo en cuenta las perspectivas curriculares y didácticas de nuestra propuesta de formación inicial, relacionada con los elementos del modelo local-triádico de los organizadores, intentaremos analizar las características de sus propuestas didácticas y las modificaciones de sus concepciones iniciales, intermedias y finales sobre enseñanza, comprensión, aprendizaje y evaluación de los distintos tópicos del contenido matemático.

Para guiar este proceso de análisis, mantendremos presentes preguntas tales como: ¿Cuales son las características y componentes del conocimiento didáctico (CD) que manejan los alumnos para profesores? ¿Qué actitudes, creencias y cuestiones influyen en la generación de estos conocimientos? Así como las respuestas de los alumnos a las tres preguntas claves que organizaban las reflexiones conjuntas y los debates al final de cada una de las sesiones del curso-taller: ¿Qué he aprendido sobre el CM y los SR desde un punto de vista escolar? ¿Qué he aprendido sobre las CG, su manejo y opciones o utilidades didácticas? Y ¿Qué he aprendido como futuro profesor de matemáticas en relación con las cuestiones anteriores?

5.7.1. Plantilla de cuestiones a evaluar sobre formación didáctica

Desde nuestro punto de vista, el conocimiento didáctico (**CD**) está relacionado principalmente con la **EC**, los **SR** y los recursos tecnológicos (**CG**) específicos con los cuales hemos trabajado durante la realización del programa. Estos elementos, constitutivos del modelo local de los organizadores y bases del conocimiento didáctico que nos ocupa constituyen los referentes teóricos para el análisis y evaluación de modificaciones. La información a analizar y evaluar sobre el conocimiento didáctico la hemos obtenido a través de la observación y registro de las distintas producciones de los alumnos durante el desarrollo del curso-taller, especialmente a partir de las multitareas iniciales y finales, las respuestas a la encuesta de evaluación final del curso-taller, las escalas de actitudes, los cuadernos de trabajo, las participaciones durante el desarrollo de las sesiones del curso-taller y las intervenciones en los debates finales de evaluación.

Aparte de los diagramas conceptuales y las definiciones de las principales nociones del contenido matemático, analizados en los apartados anteriores, los aspectos principales del CD tratados en las multitareas y en las demás producciones de los alumnos durante las sesiones del curso, están relacionados con los ítems de la siguiente plantilla de cuestiones a considerar:

A. Elección del tema o noción que consideren más importante o más difícil de enseñar o aprender, relativos a alguna de las siguientes estructuras conceptuales principales y específicas del contenido matemático:
(i) La función cuadrática;
(ii) El trinomio de segundo grado; y

(iii) La ecuación cuadrática

B. Selección y diseño de actividades de introducción, motivación y desarrollo del tema seleccionado.

C. Elección de las dificultades o errores típicos relacionados con el tema o concepto en cuestión.

D. Propuesta de evaluación sobre el tema o estructura elegida.

E. Otras producciones e intervenciones durante el desarrollo del curso-taller.

A diferencia de los anteriores análisis que hicimos de las definiciones y diagramas conceptuales, en esta ocasión, por razones de volumen de datos, vamos a considerar solamente datos globales del grupo-clase. Los resultados de estos análisis los iremos ilustrando con aquellos casos que consideremos más relevantes de entre los diferentes agrupamientos de alumnos. Para el análisis de las estructuras conceptuales relativas al contenido matemático nos apoyamos frecuentemente en la cuantificación de la información (análisis lexicométrico, de frecuencia de ítems, nódulos y conectivos, etc), mientras que para el análisis del CD nos apoyamos, fundamentalmente, en datos e información de naturaleza cualitativa o descriptiva, procedentes de las distintas producciones de los alumnos durante las diferentes fases de la implementación del programa.

Antes de comenzar el curso-taller (fase inicial F-I) y al finalizar éste (fase final F-F) pedimos a los alumnos que realizaran una multitarea, en la que les solicitamos que: (a) seleccionaran alguno(s) de los temas, nociones o procedimientos sobre el tópico de funciones que ellos consideraran más importantes de enseñar a los estudiantes de Secundaria; (b) propusieran actividades para su introducción, motivación y desarrollo; (c) indicaran alguna fuente de dificultad o de error y que propusieran actividades alternativas para superarlas; y (d) formularan una propuesta de evaluación sobre el tema escogido. En la Figuras 5.11 y 5.12 presentamos a continuación facsímiles de estas propuestas de multitareas iniciales y finales, respectivamente. Adicionalmente, durante el desarrollo de las sesiones del curso-taller (fases intermedias F-E.1 y F-E.2) planteamos sistemática y periódicamente actividades y tareas breves para que los alumnos las resolvieran en clase y en casa. Algunas de estas actividades los alumnos debían presentarlas y someterlas a reflexión y debate conjunto con sus compañeros y demás agentes participantes del curso-taller. Todas estas actividades, así como las producciones y comentarios asociados han quedado registrados en los cuadernos de trabajo de los agentes, así como en grabaciones de vídeo y audio. Los aspectos más relevantes de estas grabaciones han sido transcritos y organizados en episodios, momentos y protocolos (Véase Anexo 7).

Al final de cada una de las sesiones del curso-taller y a veces durante el desarrollo de algunas de las actividades programadas, realizamos reflexiones conjuntas sobre los temas tratados en esta sesión. La reflexión estaba orientada siempre por tres preguntas recurrentes ya mencionadas, relacionadas respectivamente con cada una de las tres cuestiones centrales de nuestro estudio: ¿Qué he aprendido hoy sobre el contenido matemático? ¿Qué he aprendido sobre las utilidades didácticas de la tecnología empleada? y ¿Qué he aprendido como profesor de matemáticas en relación con estos temas y dichas tecnologías?

Figura 5.11.
Facsímil de la multitarea inicial

TAREA INICIAL

Objetivo y contenido matemático: Revisar los conceptos de función cuadrática, trinomio de segundo grado y ecuación cuadrática desde una perspectiva curricular y didáctica a nivel de 2º Ciclo de ESO (14/16 años)

Actividades a realizar:

1ª. Enunciar y definir las principales **nociones** (conceptos), **procedimientos** y **propiedades** relacionadas con el contenido matemático propuesto.
2ª. Realizar un mapa conceptual que resuma los aspectos principales o más relevantes sobre este contenido matemático.
3ª. Seleccionar o diseñar una actividad para introducir o motivar estos temas.
4ª. Seleccionar la noción y el procedimiento que considere más difícil de enseñar o de aprender sobre estos temas, indicando algunas causas o motivos de dificultad y error.
5ª. Redactar una prueba de evaluación sobre estos temas con 5 ítems.

Extensión máxima: 5 folios DIN A4.

Figura 5.12.
Facsímil de la multitarea final

TAREA FINAL

Objetivo: Teniendo en cuenta el contenido desarrollado en el curso-taller (basado en la pluralidad y coordinación de diferentes sistemas de representación y las utilidades didácticas de las CG), complementar o profundizar la revisión de los conceptos de función, trinomio y ecuación de segundo grado realizada en la tarea inicial.

Actividades a realizar:

1ª. Revisión de la tarea inicial: reelaboración del mapa conceptual y de la definición de función de segundo grado.
2ª. Formular una secuencia concreta de presentación y motivación de uno o más tópicos seleccionados.
3ª. Presentar una apartado o secuencia de desarrollo del tema elegido.
4ª. Diseñar o seleccionar una actividad para detectar y corregir dificultades y errores.
5ª. Proponer una secuencia de actividades de apoyo o ampliación (generalización).
6º. Redactar una prueba de evaluación con 5 ítems sobre los temas seleccionados.

Extensión máxima: 10 folios DIN A4.
Fecha límite de entrega: Lunes 19 de abril de 1999.

5.7.2. Criterios para analizar el conocimiento didáctico

Junto con la plantilla de cuestiones sobre producciones de los futuros profesores que elaboramos como instrumento para analizar y evaluar el conocimiento didáctico presentada en la sección anterior, y similarmente como hicimos para el conocimiento tecnológico, para apoyar el análisis y evaluación del conocimiento didáctico (**CD**), vamos a considerar fundamentalmente tres criterios generales. Para poder apreciar si ha habido o no modificación consideraremos como referencia temporal las distintas fases de desarrollo del curso-taller: F-I, F-E.1, F-E.2 y F-F. En segundo lugar consideramos los tres elementos principales del modelo local de los organizadores. Consideraremos, conjuntamente y sistemáticamente las modificaciones en relación con la EC, los SR y las CG. Y en tercer lugar tomaremos como referencia para el análisis el grupo-clase organizado en los distintos conglomerados producidos mediante las técnicas de análisis *cluster* y de *escalamiento multidimensional*. Aunque estas técnicas son casi simétricas, inicialmente, con el fin de ilustrar el método de análisis y los efectos más relevantes o significativos del programa tomaremos como referencia los sujetos agrupados en los cuadrantes primero (PF-I) y tercero (**PF-III**) del análisis gráfico de *escalamiento multidimensional* (Figura 5.8). Elegimos esta técnica porque permite organizar y analizar la información de un modo adecuado para la clasificación y análisis de tipologías de profesores en formación a realizar en el siguiente capítulo. Los 14 sujetos (con repeticiones por tratarse del conjunto inicial, final) en estos dos cuadrantes constituyen el 70% de todos los alumnos (incluyendo repeticiones, lo cual permite relacionarlos subjetivamente consigo mismos).

5.7.3. Estudio de los alumnos agrupados en el tercer cuadrante

Los futuros profesores agrupados en el tercer cuadrante (**PF-III**) del análisis gráfico de escalamiento multidimensional son Antonio I y II, Ma. Jesús I y II e Irene II (véase Figura 5.8). Estos tres alumnos (cinco con repeticiones) corresponden al 25% de toda la muestra. Este grupo corresponde a una tipología de profesores en formación, digámoslo así, doblemente negativos (-,-), en el sentido que sus coordenadas corresponden al tercer cuadrante del plano cartesiano. Una descripción más precisa consistiría en afirmar que son alumnos para profesor con un bajo potencial actitudinal para la innovación curricular con respecto a las CG (eje de ordenadas) y una predisposición actitudinal desfavorable hacia la integración de la tecnología en el currículo y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (eje de abscisas). Además, de estos tres alumnos, solamente una (Irene) da muestras significativas de modificación (translación en el plano) entre las dos fases inicial y final del programa. Tal y como hemos dicho, estos resultados son confirmados por el análisis *cluster*, pero este tipo de análisis evaluativo y tipológico lo haremos con mayor profundidad y detalle en el próximo capítulo.

A continuación, basándonos en la plantilla de cuestiones y los criterios formulados en la sección anterior, procedemos a realizar el análisis de las producciones e indicadores de modificaciones relativos al conocimiento didáctico puestas de manifiesto en las multitareas iniciales y finales y demás producciones de estos alumnos. Para ello nos centraremos especialmente en Antonio, por considerarlo el alumno más representativo de este conglomerado. Adicionalmente, en las reflexiones generales, iremos presentando los resultados del análisis de los demás sujetos, refiriéndonos a aquellos aspectos no comunes o diferenciales, para no ser repetitivos y en razón del gran volumen de información que supondría presentar los resultados de los análisis en detalle para cada alumno.

5.7.4. Balance general sobre modificaciones relativas al conocimiento didáctico de los alumnos agrupados en el tercer cuadrante

Para orientar estas reflexiones generales vamos a seguir también a manera de guión los apartados A, B, C, D de la plantilla de la sección anterior. Empecemos por señalar que las definiciones iniciales y finales dadas por Antonio, así como por los demás integrantes del cuadrante (PF-III) son básicamente del tipo *euleriano* y "formalista". Es decir, son definiciones básicamente algebraicas, en la mayoría de los casos formuladas exclusivamente en lenguaje verbal, utilizando expresiones formales como "expresión algebraica", "expresión cuadrática", etc., como si estas fueran comodines y sus significados y comprensión estuvieran asumidos implícitamente. Por ejemplo:

"*Se llama función cuadrática a la dada por la expresión cuadrática* $y=ax^2+bx+c$, $a=0$..." (Definición inicial y final de Ma. Jesús).

O simplemente:

"*Funciones cuadráticas son aquellas funciones cuya ley es una expresión cuadrática*" (Definición inicial y final de Antonio, Figura 5.13).

Este es un problema generalizado relacionado con la utilización de los distintos lenguajes y sistemas de representación. Con frecuencia los profesores en formación y en funciones utilizan expresiones en el sistema del lenguaje natural para referirse a propiedades e incluso a otros tipos de representaciones -gráfica, numérica o simbólica- como si la triple correspondencia o traducción entre dos sistemas o lenguajes y su propio esquema interno de comprensión o concepción estuvieran dadas implícita, tácita o naturalmente. Por otra parte también podemos observar que, en general, estos alumnos tienen una escasas referencias gráficas en los distintos apartados de sus dos multitareas. Cuando la tienen, la reducen a sólo una mención en el híbrido de lenguaje natural y simbólico algebraico, como, por ejemplo:

La gráfica de una función cuadrática representa un movimiento parabólico definido por la expresión $y=ax^2+bx+c$ (Antonio, Multitarea final, Figura 5.13).

Figura 5.13.
Protocolos de las producciones de Antonio en sus tareas inicial y final sobre el contenido matemático más importante de enseñar y aprender en la ESO

A. Elección del tema sobre el contenido matemático <u>más importante</u> de enseñar en ESO	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Antonio I:	**Antonio II:**
- Definición función cuadrática (*Funciones cuadráticas son aquellas cuya ley es una expresión cuadrática*).	- Definición función cuadrática (*Funciones cuadráticas son aquellas cuya ley es una expresión cuadrática*).
- Representación gráfica (*Representación de la parábola definida por* $y=ax^2+bx+c$).	- Representación gráfica (*Representación de la parábola definida por* $y=ax^2+bx+c$. *La gráfica representa un movimiento parabólico*).
- Propiedades paramétricas (algebraicas) y gráficas (*Propiedades del factor de abertura a y del vértice de la parábola*).	- Propiedades paramétricas (algebraicas), gráficas y geométricas (*Propiedades del factor de abertura a y del vértice de la parábola. Si la función está dada en la forma estándar el vértice vendrá dado mediante las coordenadas* $(-b/2a, c-b^2/4a)$. *Mientras que si la función está dada en la forma abreviada, las coordenadas del vértice vendrán dadas por* (h, k).*Compresiones, dilataciones y translaciones de la gráfica*).
- Relación trinomio/función cuadrática (*Un trinomio de segundo grado establece la ley de una función cuadrática*).	- Relación trinomio/función (*El trinomio de segundo grado establece la ley de la función cuadrática*).
- Propiedades del discriminante de la ecuación cuadrática (*La comprensión del valor del discriminante determinará como serán las soluciones*).	- Discriminantes y propiedades de los discriminantes (*Discriminantes* b^2-4ac *y (forma abreviada)* $-k/a$. *Valor de los discriminantes y soluciones de la ecuación*).
Soluciones de la ecuación cuadrática y fórmula (*Obtención de las soluciones de la ecuación. La fórmula cuadrática* $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$).	- Soluciones de la ecuación cuadrática y fórmulas (*Solución de la ecuación cuadrática. Fórmulas cuadráticas,* $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x=h\pm\sqrt{-k/a}$, *dependiendo de la forma que tenga la ecuación*).
	- Sistemas de representación múltiples (*El*

	trinomio, la función y la ecuación de segundo grado también se pueden expresar usando la forma abreviada $a(x-h)^2+k$, *donde* a, h y k *son coeficientes racionales*).

Si embargo, al comparar los distintos apartados seleccionados en las tareas inicial y final como los más importantes y difíciles, podemos comprobar que introducen una interesante modificación (aunque todavía centrada en lo simbólico-algebraico), y que consideramos debida al contenido y metodologías propuestas en el programa[2]: Tanto el discriminante como la fórmula cuadrática y las múltiples opciones de representación, introducen en la fase final diferentes nociones relacionadas con lo que denominan la "forma abreviada" del trinomio de segundo grado: $a(x-h)^2+k$. Nosotros le llamamos en el curso-taller "expresión cuadrática del vértice".

Esta es una ligera variación de carácter representacional, que no deja de ser interesante, aunque continúa anclada en el sistema de representación clásico (SRA). Estas nuevas opciones son o pueden llegar a ser importantes porque, a pesar de seguir siendo algebraicas, establecen una referencia (base de una posterior interrelación) más directa o explícita con aspectos gráficos de la ecuación y la función cuadrática. Estas alternativas permiten interpretar y visualizar gráficamente más intuitiva y comprensivamente las soluciones de la ecuación como los puntos de corte de la parábola, el vértice, el eje de simetría, y comprender con menor dificultad la relación entre estos resultados algebraicos y gráficos y los coeficientes de las correspondientes expresiones cuadráticas, incluyendo por supuesto las que representan al concepto de función asociado. Uno de los énfasis que hicimos en la planificación y desarrollo del curso tuvo que ver con el tratamiento de diferentes formas de representar un mismo concepto y la utilización de esta multiplicidad de representaciones para visualizar, dotar de significado y comprender mejor las características y propiedades fundamentales de dicho concepto. En particular, recurrimos con frecuencia a la expresión cuadrática del vértice $a(x-h)^2+k$, toda vez que permite obtener de manera directa las coordenadas (h, k) de dicho vértice de la parábola, lo cual

[2] Algunas de las actividades de la tercera sesión fueron dedicada a trabajar el tema de la visualización de las soluciones de la ecuación cuadrática, a través de las coordenadas del vértice (h, k) y del eje de simetría $x=h$ ($h=-b/2a$). Estas actividades fueron una auténtica sorpresa para la mayoría de los alumnos. Una descripción más amplia del trabajo que realizamos sobre estos temas se puede encontrar en el episodio E.III.1 de la III-S.

facilita la comprensión y aprendizaje de la relación recíproca entre la representación simbólica-algebraica y la gráfica, cosa que no ocurre con la expresión estándar tradicional ax^2+bx+c.

Lo anterior nos sitúa en el problema didáctico del tratamiento adecuado del conocimiento matemático escolar, sus propiedades y aplicaciones dentro de múltiples sistemas de representación y de la interrelación entre ellos. Al respecto, observemos que el alumno que nos ocupa y sus demás compañeros de cuadrante, hacen un uso muy pobre de los diferentes sistemas de representación y sus interrelaciones, a pesar de que el tema se presta para ello, el contexto lo exige y se enfatizó ampliamente durante el desarrollo del curso-taller.

Pero, a pesar de que los alumnos de este agrupamiento se mantuvieron "fieles" a sus prioridades (algebraicas, eulerianas y formalistas) de concebir, seleccionar y presentar los distintos tópicos del contenido matemático, en las actividades y estrategias didácticas de introducción, motivación y desarrollo del tema (literal B de la plantilla), demuestran haber introducido importantes modificaciones. Por ejemplo, Antonio (véase Figura 5.14), pasa de proponer inicialmente un esquema simple y tradicional, basado en una concepción de función cuadrática estrictamente algebraico (euleriano) y en un enfoque metodológico "formalista", "mecanicista" e "instrumentalista", a introducir y motivar el concepto de función cuadrática a través de una situación-problema que se modeliza y se resuelve mediante una ecuación cuadrática. Observemos que inicialmente propone un par de problemas típicos, como por ejemplo, "*Hallar dos números consecutivos cuya suma de cuadrados sea 61*", a lo cual agrega sin más el siguiente comentario: "*De esta manera introducimos la ecuación cuadrática. Además, la expresión obtenida es un trinomio de segundo grado. De aquí obtenemos una función cuadrática..*. (Antonio- Multitarea inicial: Actividades de introducción, motivación y desarrollo del tema, Figura 5.14).

Figura 5.14.
Protocolos de las producciones de los alumnos (PF-III) en sus tareas inicial y final sobre las actividades de desarrollo didáctico del contenido elegido en A.

B. Actividades y tratamiento didáctico para la introducción, motivación y desarrollo del tema seleccionado en A	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Antonio I:	**Antonio II:**
- **Actividad: 1º.** *Hallar dos números consecutivos cuya suma de cuadrados sea 61.* **2º.** *Escribir una ecuación de segundo grado con soluciones 2 y -3.*	- Ídem.
- Tratamiento didáctico: (*Pretendemos saber que dos números enteros consecutivos al cuadrado suman por ejemplo cinco. De esta manera introducimos la ecuación cuadrática. Además, la expresión obtenida es un trinomio de segundo grado. De aquí obtenemos una función cuadrática. Relacionamos sus soluciones con el discriminante y con los cortes de la gráfica con el eje de las abscisas*).	- Tratamiento didáctico: (*Le vamos a dar al niño una secuencia de puntos correspondientes a la parábola* $y=x^2$ *en una tabla. Estos puntos son: (0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-3,9). Se le pedirá que represente estos puntos sobre unos ejes de coordenadas. Verá que la función es una parábola. A continuación le pedimos que intente encontrar la función que modeliza esta gráfica. Suponemos que el niño es capaz de representar rectas. Ante la imposibilidad de encontrar la función que dé la misma gráfica que la dada, introducimos los conceptos de función cuadrática, ecuación cuadrática y trinomio de segundo grado*). - Utilización de la tecnología: (*A partir de este punto utilizamos la calculadora gráfica. Le proporcionamos al niño los pasos para representar los puntos en la calculadora. Le damos la expresión general de la función cuadrática y le invitamos a que pruebe con diferentes coeficientes intentando modelizar la parábola inicial. De esta forma el niño empieza a ver la influencia de los coeficientes en la gráfica de la función y viceversa. Durante la sesión los alumnos deberán ir tomando nota de lo que hacen y de los resultados y conclusiones que obtengan, con un doble objetivo, y (i) Evitar que se distraigan y se dediquen a otros menesteres con la calculadora.*).

Las modificaciones metodológicas, sustanciales o no, que estos alumnos y, en particular Antonio hacen en sus multitareas finales las podemos atribuir a las influencias del curso-taller. Estos alumnos, a pesar de su resistencia (predisposición desfavorable) inicial sobre el uso efectivo de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas, empiezan a introducir diferentes aspectos conceptuales, procedimentales, didácticos e incluso tecnológicos en sus propuestas curriculares. Aspectos sobre los cuales hicimos gran énfasis durante el desarrollo del curso-taller. Por ejemplo, con respecto al tratamiento de los conceptos, procedimientos y problemas desde múltiples sistemas de representación, este alumno propone como criterio didáctico para introducir el tópico seleccionado la articulación complementaria de los sistemas de representación simbólico, numérico y gráfico:

> "*El estudio de las funciones de segundo grado no se debe limitar al estudio de la ecuación cuadrática ni al de la representación gráfica. Estos dos estudios se encuentran estrechamente relacionados y se complementan mutuamente*" (Antonio-Multitarea final: Actividades de introducción, motivación y desarrollo del tema elegido, Figura 5.14).

Sin embargo, no queda claro cómo propondría este alumno concretar esta idea en la práctica didáctica, porque, incluso parece contradecirse como veremos enseguida.

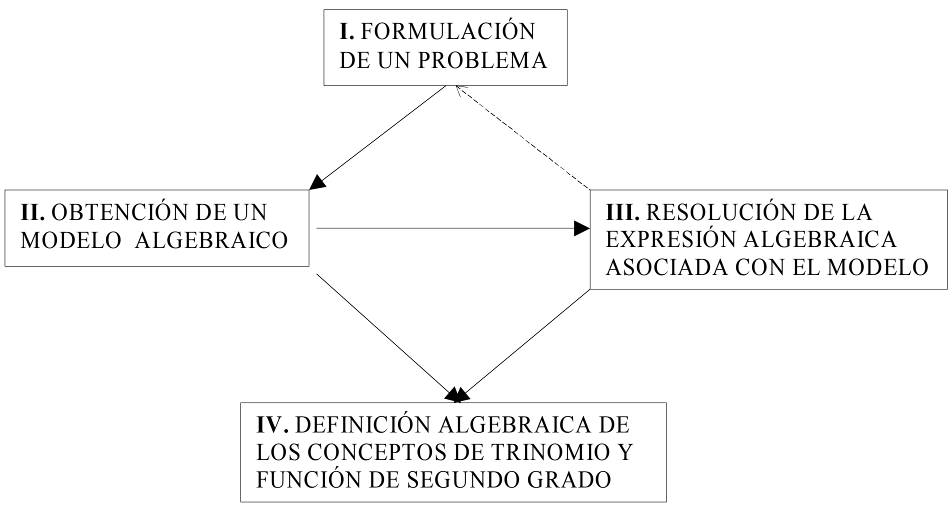
En relación con el uso de la tecnología como recurso para introducir, motivar y desarrollar el tema, que es donde más partido se le podría sacar a las tecnologías que hemos empleado, aunque estos alumnos en sus tareas finales la empiezan a tener en cuenta, de todas maneras lo hacen de una manera bastante pobre (poco efectiva) y consideran un tipo de propuesta típica entre algunos profesores. Proponen en sus tareas finales, determinadas situaciones en las que el estudiante de Secundaria puede utilizar la tecnología. Pero, de manera opcional como una herramienta que se podría usar "*posteriormente, despues de que hayan comprendido los conceptos*", como instrumento de apoyo y comprobación. De hecho, consideran que la CG podría obstaculizar, e incluso impedir ciertos procesos de comprensión de los conceptos en cuestión. No olvidemos que para estos alumnos el concepto coincide con su representación simbólica-algebraica. Veamos lo que dice uno de estos alumnos al respecto en su multitarea final:

> "*Inicialmente no se podrá utilizar la calculadora. Posteriormente y como actividad de refuerzo la utilizaremos, pues el objetivo inicial es que sepan la relación existente entre la gráfica, su expresión simbólica*

y su tabla de valores" (Antonio-Multitarea final: Actividades de introducción, motivación y desarrollo del tema, Figura 5.14).

Una de las características de este tipo de alumnos para profesor es que sus concepciones (creencias, actitudes y conocimientos conceptuales) forman un sistema coherente y persistente. Esto se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo. Para Antonio, el trinomio de segundo grado es (coincide con) "*la expresión algebraica general de la ecuación cuadrática*", y éste, a su vez, "*establece la ley de la función cuadrática*". Por lo tanto, la manera de presentar y motivar la función cuadrática es a través de un problema que se pueda modelizar mediante una ecuación cuadrática. Estos análisis dan pie para decir que, seguramente la estrategia didáctica que subyace en las propuestas inicial y final de, al menos este alumno, la podríamos describir mediante la estructura que esquematizamos a continuación en la Figura 5.15.

Figura 5.15.
Esquema de la estrategia didáctica propuesta por Antonio en sus multitareas inicial y final



En consecuencia, coherentemente con esta concepción, la dificultad típica de relacionar situaciones-problema con la correspondiente ecuación cuadrática que lo modeliza, constituye la principal dificultad (literal C de la plantilla) para la enseñanza y comprensión del concepto de función cuadrática. Por el contrario, consideramos que este tipo de situación debiera servir para replantear las estrategias didácticas que propone para desarrollar el tema de la función cuadrática. Y por otro lado, entendemos que uno de los esquemas fundamentales que se debieran atender para intentar que los alumnos para profesor los modifiquen sería el de las estrategias didácticas que subyacen en sus propuestas curriculares o didácticas.

Otro hecho interesante que observamos en las dos multitareas de este alumno, en relación con las dificultades y errores más importantes sobre el contenido matemático (véase Figura 5.16), es que considera como principal fuente de dificultad y error "*el concepto de vértice. No por el concepto en sí, sino por carecer de medios que permitan conocerlo mejor*". Probablemente, los medios a los que se refiere este alumno son de carácter matemático, tales como, por ejemplo, las técnicas de completación de cuadrados que permite convertir una expresión dada inicialmente en la forma estándar $f(x)=ax^2+bx+c$ a la forma o expresión del vértice $f(x)= a(x-h)^2+k$. Incluso, podría estarse refiriendo a las técnicas del cálculo diferencial mediante las cuales se obtiene los valores máximos o mínimos. En todo caso, creemos que no se refiere a los medios tecnológicos de representación como las calculadoras graficadoras, porque en los momentos iniciales del curso, no sólo no conocía las posibilidades representacionales y simbólicas de las calculadoras graficadoras sino que, además, presenta una fuerte resistencia a lo largo del curso hacia la integración efectiva de estas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas en secundaria. En una de sus intervenciones en el debate durante una de las sesiones finales del curso-taller, expresó lo siguiente:

> "*Cuando me dí cuenta que con la calculadora se podían calcular máximos y mínimos sin tener conocimientos de derivadas, díje, hombre, los niños tienen que aprender primero cómo se hace eso por sí mismos con el papel y el lápiz*" (Antonio, Episodio de debate E-VII.01.).

En la multitarea final desaparece esta dificultad ya que ha incorporado la expresión $y= a(x-h)^2+k$ como uno de los tratamientos en el sistema de representación simbólico útil para el estudio de la función cuadrática.

Figura 5.16.
Protocolos de las producciones de los alumnos (PF-III) sobre las principales dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje del contenido elegido

C. Principales dificultades y errores frecuentes de la enseñanza y aprendizaje del contenido seleccionado en A	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Antonio I:	**Antonio II:**
- Dificultad/error 1: *El principal problema de este tema es que el niño vea la relación entre problemas y ecuaciones de segundo grado.* - Dificultad/error 2: *Dificultad de carencia de medios que permitan conocer el vértice.*	- Secuencia de actividades para detectar errores y dificultades: 1. *Proporcionamos al alumno la gráfica de tres funciones cuadráticas.* 2. *También le daremos las tres tablas correspondientes a estas tres gráficas.* 3. *Y por último, le daremos las expresiones cuadráticas correspondientes.* *La principal intención es que el niño aprenda a relacionar cada gráfica con su tabla y con la expresión correspondiente. También intentaremos ver qué aspectos no consigue relacionar el niño y nos proporciona así la información necesaria para intentar remediar la situación*

En síntesis, este tipo de alumnos, con tendencia inicial desfavorable hacia las CG, con un potencial innovador bajo, con una fuerte concepción inicial euleriana y formalista sobre la EC relativa al tópico matemático y con una escasa consideración de los aspectos gráficos y numéricos, incorporan a sus propuestas didácticas y a su repertorio de conocimientos didácticos (CD), muy pocas referencias relativas la organización conceptual, procedimental y actitudinal del contenido matemático; la pluralidad y coordinación de los diferentes SR, y a las diversa utilidades didácticas de las modernas CG con las cuales trabajamos. Sorprende que a pesar de la gran variedad de información, materiales y recursos que suministramos durante el desarrollo del curso-taller, estos alumnos recogen y utilizan relativamente muy poco de todo esto, lo cual se ve reflejado en sus distintas producciones e intervenciones verbales.

El análisis de las producciones de estos alumnos en sus multitareas finales nos ha permitido detectar las perspectivas particulares de modificaciones que han experimentado durante el desarrollo del curso-taller. Los resultados y conclusiones las podemos confirmar al comparar finalmente las dos propuestas de evaluación que estos alumnos hicieron en la dos fases extremas del curso. Por una parte, podemos comprobar las influencias que de algún modo tuvieron las propuestas que desarrollamos. Pero, por otra parte, no movilizaron sus concepciones sobre la naturaleza del contenido matemático y formas de enseñarlo. Estos alumnos comienzan a aceptar tímidamente el importante papel que, como mediador y movilizador de los conocimientos, podrían tener los diferentes sistemas de representación, especialmente el simbólico-algebraico y el gráfico, así como la coordinación de estos dos tipos de representaciones con el apoyo del sistema numérico y el lenguaje natural.

No resulta extraño el papel que le asignan este tipo de alumno a las nuevas tecnologías en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En su propio contexto, bajo sus propias concepciones y creencias, resultan coherentes. Las calculadoras son herramientas de apoyo para aprender y enseñar, no son instrumentos de procesamiento y movilización de estos conocimientos, por ejemplo, no le resultan indispensables para resolver y realizar determinados problemas y procedimientos. Son, digámoslo así, un instrumento que se puede utilizar pero que igual se podría omitir o reemplazar por cualquier otro recurso. Es decir, no cambian en esencia nada o casi nada del currículo tradicional. La tecnologías hay que introducirlas hacia el final, después que los alumnos han intentado aprender las matemáticas "*por sí mismos, con el papel y el lápiz*" (Antonio). Introducirlas para motivar, para comprobar y para convencer al estudiante. Pero, una vez que han aprendido, tienen hay que volverlas a dejar de lado, como si fueran un "mal necesario e incluso en algunos casos innecesario". Por eso, al final, cuando se trata del examen o prueba de evaluación, el estudiante no la puede ni la debe utilizar. Porque, quizás, lo que tiene que demostrar en ese momento es que ya ha aprendido lo que tenía que aprender y como lo tenía que aprender. Necesitar la tecnología para resolver el examen sería un indicador de que todavía no ha aprendido. Este es otro tipo de actitud desfavorable o un refinamiento de la que ya tenían desde antes de iniciar el curso-taller. Por ejemplo, Ma Jesús, que no modifica en nada su propuesta inicial de evaluación, hace el siguiente comentario en relación con la posibilidad de permitir usar la CG en los exámenes: En la multitarea final, esta alumna propone como prueba de evaluación la misma que propuso en la tarea inicial, y agrega el siguiente comentario:

"*La prueba de evaluación coincide con la de la tarea inicial, sin incluir la calculadora gráfica. La calculadora la veo muy bien como instrumento de apoyo para mejorar el entendimiento de los conceptos. Pero, una vez que estos han sido adquiridos, el alumno debe estar ya suficientemente capacitado para realizar un examen sin necesidad de utilizar la calculadora*" (Ma. Jesús, Tarea final: Prueba de evaluación, Figura 5.17).

Figura 5.17.
Protocolos de las producciones de los alumnos (Antonio, PF-III) en sus tareas inicial y final sobre la propuesta de evaluación de las actividades desarrolladas en A, B y C.

D. Propuesta de evaluación sobre las actividades realizadas en A, B y C	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Antonio I:	**Antonio II:**
1º. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $x^2+2x+1=0$; b) $x^2-1=0$ y c) $x^2+x+2=0$. *Indica que tipo de soluciones se obtienen.* *2º. Representa gráficamente la siguiente función aproximadamente.* $y= x^2+3x+9$.	*1º. Representa aproximadamente* las siguientes funciones en el intervalo [-10, 10]:* **a)** $y=x^2+3x+1$; **b)** $y=x^2-2$. *2º. Dada la función* $y=x^2+bx+4$, *determinar el valor de* **b** *correspondiente a cada una de las siguientes tablas:* x: 0, 1, -1 ; x: 0, 1, -1 y: 4, 6, 4 ; y: 4, 2, 6. 3º. *Dada la función* $y=2x^2+x+1$, *dar la expresión de una función más cerrada y otra más abierta.* 4º. *Da una tabla de valores (con al menos tres parejas de puntos) de las siguientes funciones:* **a)** $y=x^2-2x-4$; **b)** $y=x^2+x+2$. *5º. Da la expresión y representa tres funciones que pasen por el punto* (-1, 2). *Calcular las soluciones de al menos una de ellas.*

Para este alumno, la expresión "representa aproximadamente", quiere decir hacer un bosquejo (sin utilizar la CG). De hecho, en sus intervenciones en los debates conjuntos y en la encuesta de evaluación final mantuvo que no era partidario de utilizar la calculadora gráfica en los exámenes. Para este alumno, la calculadora puede ser usada como un simple instrumento de apoyo en el aula, pero no modifica su manera convencional de tratar los temas, ni la admite como algo fundamental para la enseñanza de las matemáticas, ni mucho menos para ser utilizada en las evaluaciones.

Insistimos que, las concepciones (euleriana y formalista) sobre la estructura conceptual de las funciones cuadráticas y sobre las estrategias para su enseñanza, es decir, las maneras de concebir la interrelación entre los tres elementos organizadores a la hora de pensar las propuestas curriculares y de enseñanza sobre estas estructuras matemáticas constituyen un fuerte *handicap* para el desarrollo de actitudes favorables hacia una integración efectiva de las nuevas tecnologías de representación múltiple y cálculo simbólico como las modernas CG, en el currículo y en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

5.7.5. Estudio de los alumnos agrupados en el primer cuadrante

Los alumnos que conforman este conglomerado o primer cuadrante (PF-I) de acuerdo con el análisis gráfico de *escalamiento multidimensional* son: Ana I y II, Juan I y II, Patricia I y II, Isaías I y II y Rosario II (véase Figura 5.8). Esto cuatro alumnos (nueve con repeticiones) conforman el 45% de todos los alumnos (los del tercer cuadrante hacen el 25%). Este grupo de alumnos, según su ubicación en el primer cuadrante y según los resultados simétricos de los análisis *cluster* se caracterizan por ser futuros profesores de matemáticas con un alto potencial actitudinal para la innovación curricular con respecto a las CG y una predisposición actitudinal favorable hacia la incorporación de estas tecnologías en el currículo y aula de matemáticas. Como podemos obsérvalo en la Figura 5.8 todos estos alumnos se han ubicado en este primer cuadrante o muy próximo a él en las dos fases extremas (inicial y final) del programa. Excepto Rosario, que como se indica, ha modificado su predisposición actitudinal inicialmente desfavorable (semiplano izquierdo) a favorable (semiplano derecho). Incluyendo a esta alumna (Rosario), que de todas maneras se ha mantenido muy próxima a las predisposiciones actitudinales favorables, todos estos alumnos para profesor se caracterizan por tener inicialmente y mantener (hasta la fase final del programa), una predisposición, además de favorable, efectivamente innovadora sobre la incorporación y utilización de la CG en el currículo y aula de matemáticas de enseñanza secundaria.

De la misma manera que en los apartados anteriores, nos limitaremos a presentar los resultados del análisis de modificaciones del conocimiento didáctico (CD), puestos de manifiesto por las distintas fuentes e instrumentos de recogida de información, especialmente en las multitareas inicial y final y teniendo en cuenta los diferentes apartados (A, B, C y D) de la plantilla de cuestiones a analizar y evaluar de los sujetos para profesor en este primer (I) cuadrante, aunque centrándonos en uno de los alumnos, Isaías, el cual consideramos más representativo, en el sentido que concentra y permite describir una mayor cantidad de aspectos, así como detectar o estimar los efectos del programa al respecto.

5.7.6. Balance general sobre la formación didáctica del grupo de alumnos en el primer cuadrante

Los alumnos de este conglomerado, igual que todos los alumnos de la muestra, sin excepción, tienen una concepción euleriana y formalista sobre la estructura conceptual (EC) de los tópicos del contenido matemático que nos ocupa. Sin embargo, la mayoría de los alumnos de este grupo consideran de manera complementaria una gran diversidad de referencias gráficas y diversos aspectos conceptuales y procedimentales que caracterizan el concepto. Esta diversidad conceptual y procedimental permite abordar sistémicamente el contenido matemático, de una manera más acorde con la idea estructural como concebimos en este trabajo los conceptos y contenidos matemáticos. El hecho de considerar en una misma actividad toda una diversidad apropiada de nociones y procedimientos de la estructura conceptual asociada al contenido que se pretende enseñar y relacionados entre sí a través de una situación-problema adecuada, es una estrategia didáctica más próxima a un punto de vista constructivista. Además, resulta interesante el tratamiento integrador que algunos de estos alumnos y en este caso Isaías, lo mismo que Ana, hacen y proponen para dos de los principales sistemas de representación convencionales, el simbólico-algebraico y el gráfico. La construcción y comprensión de la relación entre la ecuación algebraica de una función y las propiedades de su gráfica es uno de los problemas didácticos más importantes en relación con la enseñanza de las funciones en secundaria.

Creemos que, al margen de la tendencia de actitudes positivas que demuestran tener estos alumnos, situación de la cual se puede derivar un cierto interés por la consideración coordinada de múltiples sistemas de representación y la integración de tecnologías en la enseñanza, puede tener que ver con la asunción de la complejidad y diversidad de aspectos que plantea un dominio conceptual matemático como el que estamos considerando en este estudio. Este hecho nos lleva a afirmar que, las actitudes positivas y efectivas hacia las nuevas tecnologías están en este caso estrechamente relacionadas con una concepción de los conocimientos matemáticos que considere su complejidad, creatividad y polifuncionalidad.

Estos casos nos permiten verificar que las concepciones de los alumnos para profesor sobre un contenido matemático determinado o sobre las estructuras conceptuales asociadas al mismo y reflejadas en sus definiciones y representaciones mediante diagramas conceptuales, están estrechamente relacionadas con sus concepciones didácticas, puestas de manifiesto en sus propuestas y producciones para la enseñanza de estos contenidos. Si volvemos a revisar las definiciones iniciales y finales de Isaías (véase Figura 5.18), observamos que, a diferencia de los demás alumnos, la definición final dada por Isaías se ve ampliada coonsiderablemente haciendo explícitas una variada gama de propiedades fundamentales del concepto en cuestión, que la sola definición formal o canónica no permitiría siquiera vislumbrar, al menos en estudiantes de secundaria, los cuales seguramente estudian estos temas por primera vez. Complementariamente, la mayoría de los alumnos de este grupo (PF-I) no dudan en integrar y coordinar diferentes opciones de representación (al menos la algebraica y la gráfica) para explicar e intentar que los estudiantes comprendan de manera múltiple e interrelacionada las diferentes características y propiedades del contenido o concepto.

Figura 5.18.
Protocolos de las producciones de Isaías (PF-III) en sus tareas inicial y final sobre el contenido matemático más importante de enseñar y aprender en la ESO

A. Elección del tema sobre el contenido matemático más importante de enseñar o aprender en la ESO	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Isaías I:	**Isaías II:**
- Definición función cuadrática: *Son*	- Definición función cuadrática: *El concepto*

funciones que corresponden a la ecuación $y=ax^2+bx+c$, donde a, b, $c \in \Re$ y $a \neq 0$.	de función cuadrática viene dado por la conjunción de dos estructuras, una algebraica dada por $y=ax^2+bx+c$, donde a, b, $c \in \Re$, $a \neq 0$ y otra gráfica llamada parábola. La relación y unión de ambas estructuras, tanto de lo algebraico a lo gráfico, como de lo gráfico a lo algebraico nos desarrolla un concepto que ha de ser impartido en secundaria de esta forma. Esta conjunción debe verse, no como una traba, sino como una herramienta de apoyo para construir el concepto de función cuadrática, intuitivo pero difícil a estas edades.
- Representación gráfica y propiedades: (i) Las gráficas (a las que se les suele llamar comúnmente <u>parábolas</u>), siempre tienen un eje de simetría paralelo al eje de las Y. (ii) El vértice de la parábola tiene como componente respecto del eje de las X el valor: $V_x=-b/2a$. El vértice viene dado por el par: $V=\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ siendo $f(x) = y$. (iii) Si el coeficiente $a>0$, entonces obtenemos una parábola hacia arriba (insertar gráfica 1). (iv) Si el coeficiente $a<0$, entonces obtenemos una parábola hacia abajo (insertar gráfica 2). (v) Cuanto mayor sea $\|a\|$ más estilizada es la parábola, y cuanto más pequeño sea ese valor más achatada será la gráfica de la función. (vi) Los puntos de corte con el eje de las X se obtienen al resolver la expresión de la función igualada a cero $ax^2+bx+c=0$. Para el eje de las Y basta con asignar el valor $x=0$.	- Representación gráfica y propiedades: Idem.
- Ecuación cuadrática: La ecuación cuadrática es una ecuación algebraica de 2° grado cuya forma general es: $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c \in \Re$, $a \neq 0$, y puede presentar los siguientes casos: a) Ecuación sin término en x: $ax^2 + c = 0$. (b) Ecuación sin término independiente: $ax^2 + bx = 0$. (c) Ecuación con "x" en un cuadrado perfecto: $m(x-p)^2-n=0$. (d) Ecuaciones como producto de varios factores: $k(x-p)(x-q)=0$.	- Ídem.

Soluciones de la ecuación cuadrática y fórmula: En primer lugar hay que obtener la solución general de la ecuación cuadrática. Primero multiplicamos la expresión $ax^2+bx+c=0$ por 4a; (siguen los pasos conocidos). Así obtenemos las dos soluciones: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.	- Ídem.
- Propiedades generales del discriminante.	- Ídem

Otra diferencia importante de este tipo de alumnos con respecto a los demás es que, al no estar ya exclusivamente centrados en una concepción algebraica o euleriana formalista y al considerar la complejidad del contenido a enseñar, no asumen implícitamente que la comprensión de nociones como “expresión cuadrática”, “gráfica de la función”, “parábola”, etc., está dada de manera intuitiva y directa. Por el contrario, recurren coordinadamente a todo un bagaje de opciones representacionales (verbal, gráfica, numérica, algebraica) y visualizaciones para explicitar el sistema de ideas abstractas en que consiste un concepto matemático. Esta posturas resulta conveniente para, hacer propuestas de enseñanza y evaluación que aborden esta complejidad conceptual, y que además, sean abiertos y suficientemente flexibles para poder acceder a nuevas e innovadoras propuestas y recursos teóricos, prácticos y tecnológicos.

Las propuestas de actividades para introducir, motivar y desarrollar el tema (véase Figura 5.19), así como para su evaluación (véase Figura 5.21), resultan coherentes con sus concepciones, ya puestas de manifiesto en sus definiciones y diagramas conceptuales. Además, estas propuestas tienen en cuenta la complejidad y perspectiva del contenido matemático y se proponen con un carácter igualmente abierto y flexible, de tal modo que permiten ser modificadas en base a las nuevas propuestas y recursos. Si intentamos comparar las dos propuestas inicial y final de introducción, motivación y desarrollo del tema hechas por Isaías (véase Figura 5.19), observamos que, aunque las propone como complementarias, o mejor, la segunda como una ampliación de la primera, de todas maneras tendría que reformularla para poder hacer realmente efectiva la orientación didáctica que plantea para la misma.

Figura 5.19.
Protocolos de las producciones de Isaías (PF-I) en sus tareas inicial y final sobre las actividades de desarrollo didáctico del contenido elegido en A.

<table>
<tr><th colspan="2">B. Actividades y propuesta didáctica para la introducción, motivación y desarrollo del contenido elegido en A</th></tr>
<tr><th>Multitarea inicial</th><th>Multitarea final</th></tr>
<tr><th>Isaías I:</th><th>Isaías II:</th></tr>
<tr><td>- Actividad inicial (situación-problema):
Consideremos una cuerda de 12 cm. atada por sus dos extremos. Gracias a ella podemos formar de manera fácil un rectángulo de perímetro 12 cm. Observamos que podemos construir muchos rectángulos dependiendo de cómo cogemos la cuerda. Observa la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>Base</th><th>Altura</th><th>Base+altura</th><th>Área</th></tr>
<tr><td>2 cm</td><td>4 cm</td><td>6 cm</td><td>8 cm^2</td></tr>
<tr><td>2.5 cm</td><td>3.5 cm</td><td>6 cm</td><td>8.75 cm^2</td></tr>
</table>
(a) Completa 3 nuevas filas y dibuja los rectángulos correspondientes.
(b) Dibuja un diagrama cartesiano y representa los puntos que corresponden a las parejas de valores (base, altura).
(c) ¿Están los puntos que has construido en una línea conocida? ¿Cuál? Completa una gráfica con esos puntos.
(d) Encuentra la ley o expresión algebraica que relaciona la altura con la base.
(e) Calcula el valor de la Base y la Altura para que el rectángulo que formes tenga Area máxima.</td>
<td>- Actividad inicial (Ídem).
- Propuesta de tratamiento didáctico: Para llegar a una revisión gráfica de la función cuadrática se debe de hacer primero un estudio algebraico de la expresión estándar $y=ax^2+bx+c$, a partir de la expresión $y=x^2$ y también en el otro sentido. La expresión estándar tiene otra versión algebraica a tener en cuenta: $y=a(x-h)^2+k$, donde (h,k) son las coordenadas del vértice. La distinción entre ambas se debe hacer en función de la utilidad y necesidad (tipo de problema, necesidad, etc.). Una vez realizado esto, la visión algebraica toma gran protagonismo cuando se intenta resolver la función $y=ax^2+bx+c$.
Como conclusión, debemos hacer más hincapié en como la resolución de una cuestión o problema concreto se ve mejor fundamentada por una visión algebraica, numérica y gráfica, las cuales se complementan, a la vez que establecen puntos de vista particulares que deben ser recorridos en ambos sentidos.</td></tr>
</table>

Basándonos en el análisis de sus propuestas podemos afirmar que un esquema de la estrategia didáctica inicial de este alumno se puede representar de la siguiente manera simple, secuencial o lineal:

Situación problema ⇒ **Tabla de valores** ⇒ **Representación gráfica** ⇒ **Expresión algebraica**

De acuerdo con este esquema, el alumno considera que los dos tópicos más difíciles de enseñar y aprender son la comprensión (origen y utilización) de la "fórmula cuadrática" y la comprensión de la relación (“*el paso*”) entre la ecuación cuadrática y la función cuadrática (véase Figura 5.20). De hecho, algunos ítems de la prueba inicial de evaluación están dirigidos a verificar si el alumno ha comprendido o aprendido estos tópicos (véase Figura 5.21).

Figura 5.20.
Protocolos de las producciones de Isaías (PF-I) en sus tareas inicial y final sobre las principales dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje del contenido elegido en A

C. Principales dificultades y errores de enseñanza y aprendizaje del tema o contenido elegidos en A	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Isaías I:	**Isaías II:**
- **1º**: *Por una parte, la “formula” para la resolución de la ecuación cuadrática, suele provocar en el alumno la idea de que esta surgió, por así decirlo, como por arte de magia. Además, siempre se utiliza la fórmula de manera mecánica, sin razonar ni interpretar correctamente los resultados que se obtienen.* **2º**: *Otro problema que suele surgir al alumno es la asociación, o mejor, el paso de la noción de ecuación cuadrática a la de función cuadrática, pues el alumno necesita de una maduración que en muchas ocasiones no tiene.*	*- Pensamos que es en este punto (relación de la noción de ecuación cuadrática con la de función cuadrática) cuando en secundaria se tienen más problemas, además no se suele contemplar la relación existente entre la resolución de la expresión algebraica y la representación gráfica. Quizás esto es debido a la poca importancia que muchos profesores otorgan a la multitud de herramientas y materiales que hoy día existen para completar el estudio del concepto de función cuadrática.*

Sin embargo, al analizar el esquema de la orientación didáctica propuesta en la tarea final éste se podría expresar de la siguiente forma:

Estudio gráfico de la función de segundo grado
"*comúnmente llamada parábola*".

$\Updownarrow$

Estudio algebraico de las expresiones:
- Estándar $y=ax^2+bx+c$
- Del vértice $y=a(x-h)^2+k$

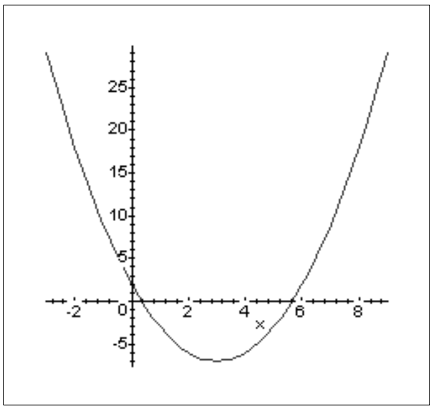
A partir de la expresión básica $y=x^2$.

Para este alumno, al final del curso-taller, el sistema de representación gráfica cobra otra dimensión o función. No sólo es un medio para llegar a la expresión algebraica a partir de una situación problema, sino que constituye un medio de estudio y comprensión del concepto de función cuadrática, que se debe considerar de manera coordinada con el otro medio (la representación algebraica). Asignarle este tipo protagonismo al sistema de representación gráfica, exige, no sólo estar continuamente transfiriendo o traduciendo información de un sistema a otro, sino también, tener que obtener una mayor cantidad de gráficas y propiedades, además de procesarlas y analizarlas. Pero, todo esto se tiene que hacer en, relativamente, poco tiempo. Así las cosas, este tipo de alumnos para profesor, tienen razones más que suficientes para interesarse por las utilidades didácticas de las nuevas tecnologías, y, más aún, para aceptarlas cuando se les presenta y demuestra en cursos y talleres, cómo estas utilidades pueden, justamente, ayudar a resolver y abordar los problemas, situaciones y dificultades didácticas que se les presentan y que son inherentes a sus concepciones y propuestas didácticas. Podemos afirmar que, la calculadora es, efectivamente, una herramienta útil para quien reconozca o tenga conciencia de tener un problema que justifique su uso, y esto depende, en buena parte, de las concepciones y creencias que se tengan acerca del conocimiento matemático y su enseñanza. No basta con tener una actitud positiva o favorable hacia estas herramientas. La "justificación" que da este alumno (véase multitarea final en Figura 5.20) parece justificar nuestras anteriores conclusiones.

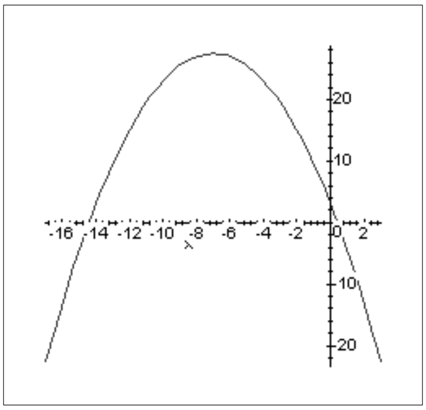
Sobre la incorporación de la tecnología en los exámenes o evaluaciones estos alumnos se mostraron partidarios, aunque con diversas condiciones. A pesar de ser los alumnos más interesados y con una mayor predisposición favorable hacia las tecnologías, algunos, como Isaías no las incluyen en ninguna de sus propuestas (inicial o final) de evaluación. Por ejemplo, Isaías opina que para hacer esto habría que "*cambiar toda la metodología*" de evaluación (véase Figura 5.21).

Figura 5.21.
Protocolos de las producciones de los alumnos (Isaías, PF-I) en sus tareas inicial y final sobre la propuesta de evaluación de las actividades desarrolladas en A, B y C.

D. Propuesta de evaluación de las actividades propuestas en A, B y C	
Multitarea inicial	**Multitarea final**
Isaías I:	**Isaías II:**
1º. Factoriza los siguientes trinomios de segundo grado como producto de 2 binomios de primer grado: (a) $x^2 - 5x$ *(b)* $x^2 + 4x + 4$. *2º. Halla b y c para que cada ecuación tenga solución única (a)* $4x^2+bx+16=0$ *(b)* $3x^2-6x+c=0$. *3º. Indica qué fórmula corresponde a cada una de las siguientes gráficas* (véanse gráficas (a) y (b) al pie del cuadro). *4º. Para celebrar el final de curso, un grupo de alumnos compró 5 docenas de pasteles, cuando se disponían a comérselos, llegan 5 compañeros más y al repartir de nuevo tocan a 2 pasteles menos, ¿cuántos alumnos había?* *5º. Para construir un puente con un tablón debemos controlar el grosor, anchura y longitud. La tabla muestra como varía el peso soportable en función del grosor, sabiendo que el tablón mide 1m de largo y 30 cm de ancho.* *Grosor tabla(cm):* 1 2 3 4 5 *Máx. peso soport.:* 10 40 90 160 250 *Representa estos datos en una gráfica y halla una fórmula cuadrática que se ajuste a esta ecuación.*	- Ídem.



(a)



(b)

En conclusión, una de las principales características a señalar de estos alumnos para profesor, es la actitud abierta ante una nueva propuesta y la actitud crítica frente a ella. Todos coinciden en considerar las CG como un importante y positivo factor de innovación, organización y desarrollo curricular y didáctico. Sin embargo, no en todos los alumnos este tipo de actitud favorable resulta efectiva, en el sentido que se deciden a incorporarlas adecuadamente en sus propuestas curriculares y didácticas. Hemos observado que otra de las condiciones que podrían ser necesarias para que esto se lleve a efecto es que los alumnos para profesores se muestren abiertos y críticamente susceptibles de modificar o al menos revisar sus concepciones, creencias, actitudes y enfoques iniciales, tanto en sus propuestas y producciones como frente a las críticas, reflexiones y experiencias que reciben en las interacciones con profesores-formadores y con sus compañeros.

En general, ni los alumnos con un mayor grado de actitudes desfavorables (cuadrantes II y III), ni los alumnos con un alto grado de actitudes favorables (cuadrantes I y IV) mostraron modificaciones efectivas en su conocimiento didáctico en relación con la incorporación y utilización de las tecnologías en sus propuestas curriculares o didácticas. Todos los alumnos del I cuadrante, excepto Isaías y Rosario, a pesar de tener una predisposición favorable hacia la tecnología y un potencial actitudinal innovador al respecto, no mostraron modificaciones importantes y efectivas. Esto nos permite considerar dos subagrupamientos dentro del agrupamiento del I cuadrante, los cuales, analizaremos con mayor detalle en el próximo capítulo.

Tales futuros profesores deben tener una concepción amplia del conocimiento matemático, de tal manera que les permita admitir o asumir la complejidad y diversidad estructural y representacional de un contenido matemático escolar (véanse, por ejemplo, los diagramas conceptuales de estos dos alumnos). Deben ser abiertos, reflexivos, creativos y estar dispuestos a revisar y modificar crítica y efectivamente, no sólo verbalmente, sus posturas y creencias sobre el conocimiento matemático, sobre su enseñanza y su evaluación, es decir, sobre el tipo de conocimiento didáctico o formación didáctica que posean, para poder acceder de manera efectiva a las posibilidades curriculares o didácticas de las nuevas tecnologías y a propuestas curriculares y didácticas complejas e innovadoras como la que se les ha ofertado en el curso-taller.

A efectos de ilustrar las reflexiones anteriores, a la vez que las características comunes pero diferentes de los integrantes del conglomerado que nos ocupa, y tomando como referencia su formación didáctica, presentamos finalmente los aspectos característicos más relevantes de otro de los alumnos (Rosario) de este mismo agrupamiento. Empecemos por decir que para Rosario, de la misma forma que para los otros alumnos en este cuadrante, las principales ventajas que, al final del curso, atribuyen a la utilización de las CG en la enseñanza/aprendizaje de las funciones y ecuaciones en secundaria, coinciden ampliamente con el papel que se le atribuye a estas tecnologías en la literatura actual sobre la enseñanza de la matemática basada en dicho organizador. La consideración de estas funciones tecnológicas ha sido central en la realización (diseño, planificación e implementación) de nuestro programa de formación. En el capítulo II (Marco Conceptual) desarrollamos ampliamente estas ideas. Algunas de las ventajas que Rosario plantea en la encuesta de evaluación final del curso son las siguientes:

– Posibilidad de manejar simultáneamente diferentes tipos de representación.
– Mejor comprensión de los procesos de modelización de problemas.
– No hay necesidad de detenerse mucho tiempo en cálculos y procedimientos que en ese momento no formen parte de nuestros objetivos

didácticos, pues la calculadora los puede hacer automáticamente (al menos parcialmente).
– Mayor rapidez en la realización de operaciones.
– Posibilita el descubrimiento por el propio alumno de las propiedades de las gráficas de funciones.
– Mayor libertad para elegir los caminos a seguir para la resolución de problemas.
– No se haría tanto hincapié en el aprendizaje y dominio de algoritmos y se incrementaría la comprensión de los conceptos.
– La evaluación se centraría más en la comprensión de conceptos que en el dominio de algoritmos.

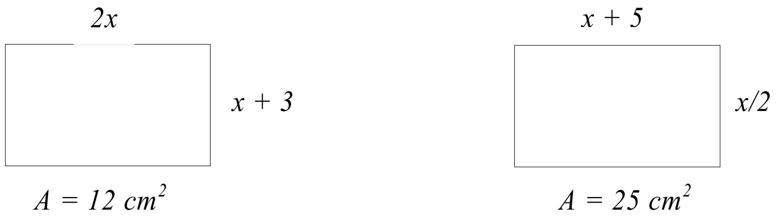
Por otra parte, aunque esta alumna también tiene una concepción euleriana de los conceptos de función y ecuación cuadrática, su concepción general sobre la estructura conceptual no es típicamente formalista. Este hecho se refleja tanto en sus explicaciones iniciales como finales sobre los distintos tópicos del contenido matemático, donde refleja la complejidad de los conceptos, sin importarle tanto sus aspectos formales. Como podemos observar en sus tareas, y especialmente en la final, introduce múltiples ejemplos y representaciones gráficas (aunque, curiosamente, omite considerablemente las representaciones numéricas), preocupada más por desarrollar una explicación didáctica, atendiendo las supuestas causas de dificultad, que una estructura formal de los tópicos matemáticos en cuestión.

Finalmente, las modificaciones relacionadas con la FD experimentadas por esta alumna confirman nuevamente nuestro supuesto de que esta tipología de alumnos son los que más posibilidades tienen de integrar las calculadoras graficadoras efectiva y eficazmente en sus propuestas didácticas. De hecho son los únicos que lo consiguen. Incluso en sus propuestas de evaluación. A continuación presentamos algunos de los ítems de la prueba de evaluación propuesta por Rosario:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones de la forma que te parezca más conveniente. Puedes usar papel, representaciones gráficas o calculadora.*

***a**. $(x-5)\cdot(x-7)=0$* ***b.** $16-x^2=0$* ***c.** $5x^2-x=0$* ***d.** $x^2+5x+25=0$*

- *Halla en cada caso el valor de x para que los rectángulos dados tengan el área indicada:*



a) ***b)***

Una vez que lo hayas hecho en el papel, hazlo con el Cabri de tu calculadora (TI-92) y comprueba con las soluciones obtenidas.

- *Representa las siguientes parábolas como transformaciones geométricas de la parábola* $y = -x^2 + 5$.

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ ***b)*** $f(x) = -x^2 - 3$ ***c)*** $f(x) = 2 \cdot (x + 8)^2 - 5$

Representa gráficamente cada uno de los pasos seguidos. Utiliza la calculadora gráfica.

5.8. RESUMEN Y CONCLUSIONES GENERALES SOBRE EL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos y evaluamos el programa de acuerdo con las tres dimensiones subjetivas consideradas. Es decir, analizamos y evaluamos los efectos y resultados del programa en los participantes en relación con las cuatro cuestiones principales del estudio. Este hecho completa la evaluación de la coherencia conceptual del programa realizada parcialmente en el capítulo anterior. Estas tres dimensiones junto con sus respectivos sistemas de indicadores permiten dar cuenta de los distintos aspectos relacionados con estas cuatro cuestiones, estructuradas en el modelo local de los organizadores.

De acuerdo con esto, nos preocupamos por analizar, interpretar y valorar las maneras como los estudiantes para profesor conciben, asimilan y utilizan los diversos tipos de conocimientos –conceptuales, procedimentales y actitudinales- puestos en funcionamiento durante el desarrollo del curso-taller y en sus propuestas curriculares y didácticas formuladas en las distintas tareas, y relacionados con la estructura sistémica conceptual relativa a los diferentes tópicos del contenido matemático, considerados desde las múltiples opciones de los sistemas de representación, así como los conocimientos relativos a los recursos tecnológicos que nos ocupan. El análisis y valoración de estos procesos subjetivos (conocimientos, concepciones y modificaciones de estos) nos permitió apoyar las valoraciones generales del programa presentadas en el Capítulo IV, y permitió recoger la información necesaria para el estudio (detección, descripción e interpretación) de las tipologías de profesores en formación que presentaremos en el siguiente capítulo.

En general, los estudiantes para profesor que participaron en el curso-taller, a pesar del dominio experto que tienen en relación con el contenido matemático, no mostraron un buen dominio de estos conocimientos cuando se consideran desde una perspectiva escolar. Todos los estudiantes pusieron de manifiesto estar centrados en concepciones formalistas sobre los distintos tópicos del contenido matemático tratado. La mayoría, además, tienen estas concepciones y creencias de una manera muy rígida, es decir, de un modo poco flexible. Este hecho dificulta aun más las posibilidades de acceder a las nuevas propuestas curriculares basadas en principios constructivistas, exploratorios y en ambientes de resolución de problemas, para lo cual creemos se requieren actitudes favorables, y una postura, flexible, reflexiva y autónoma.

VI

TIPOLOGÍAS DE PROFESORES EN FORMACIÓN

6.1. INTRODUCCIÓN

> En el futuro lo que hay que comprender es la interacción dinámica entre los componentes del conocimiento y las creencias de los profesores, el papel que estos juegan y cómo este papel difiere en función de sus creencias y conocimientos (Fennema & Franke, 1992, p. 163).

En la literatura sobre formación inicial y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas (Fennema y Franke, 1992; Thompson, 1992; Flores, 1998*a*; García, 1996; Llinares, 1998; Rico, 1998*b*,*c*), se reconoce la necesidad de realizar estudios que permitan caracterizar tipologías o perfiles de profesores, toda vez que, entre los principales factores que influyen en los procesos curriculares y prácticas instruccionales, están los sistemas de ideas que los profesores tienen sobre el conocimiento matemático (su naturaleza epistémica, razón de ser, etc.), así como sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje. La complejidad de esta variedad de factores junto con las del propio sistema curricular deben ser consideradas a la hora de diseñar un programa de formación didáctica del profesorado de matemáticas. Consideramos que el estudio y la caracterización de tipologías de futuros profesores, debe ser abordado de manera sistémica en función de esta complejidad, relacionada de manera local con los distintos tipos de contenidos y conocimientos –

conceptuales, procedimentales, actitudinales y representacionales- matemáticos, cognitivos y didácticos.

Al analizar los conocimientos didácticos sobre el contenido matemático, tecnológico y los sistemas de representación propuestos en el desarrollo del curso se ponen de manifiesto distintos tipos de profesores en formación. En este sentido la detección de tres tipologías de futuros profesores y su caracterización en términos de los conocimientos que sostienen el marco teórico local del estudio, es un resultado destacable de esta investigación al que dedicamos todo un capítulo. No pretendemos que las tipologías aquí descritas respondan a prototipos más generales. Pero sí es cierto que muestran consistencia y coherencia de cuyo interés estamos convencidos.

El estudio de estas **tipologías de profesores en formación** ha aportado conocimientos y experiencias específicas sobre las características de los futuros profesores de matemáticas que participaron en el programa, en relación con los distintos elementos que componen el modelo local de los organizadores para el currículo. Sin duda, esta información y caracterización de tipologías, como veremos a partir de la siguiente sección, constituye una importante y necesaria aportación para adaptar futuras generaciones del programa a otros contextos más amplios y naturales.

La metodología que hemos empleado para hacer el análisis y caracterización de las distintas tipologías ha sido una metodología integradora basada en los avances metodológicos actuales sobre evaluación de programas y estudio de casos. Esta opción metodológica (multimétodo) nos ha aportado medios para estudiar descriptivamente de una manera amplia la complejidad de los procesos y situaciones objetivas y subjetivas que ocurren simultaneamente durante el desarrollo del programa. La elección de los grupos de sujetos que conforman las distintas tipologías se ha hecho teniendo en cuenta, principalmente: (i) Los resultados de los agrupamientos (conglomerados) realizados a partir de las técnicas de análisis *cluster* y de *escalamiento multidimensional*, y (ii) las decisiones tomadas por parte del equipo de investigación, a partir de la observación participante y el análisis de episodios y protocolos. Los episodios y protocolos, así como la demás información de soporte han sido obtenidos mediante las transcripciones de las grabaciones de las sesiones y el análisis de las demás producciones de los alumnos durante el desarrollo del programa. Los principales instrumentos han sido: la encuesta de evaluación, las escalas de actitud, las multitareas, los cuadernos de trabajo, y las intervenciones de los alumnos en los debates realizados durante el desarrollo de cada una de las sesiones del curso-taller.

Para llevar a cabo el análisis y caracterización de las distintas tipologías, hemos empleado una **plantilla de indicadores**, que nos ha servido de referencia para escribir este último capítulo. Esta plantilla está basada en los criterios y categorías que consideramos en el capítulo anterior para realizar los análisis de modificaciones de los sujetos en relación con su conocimiento didáctico (véanse Secciones 5.7.1. y 5.7.2.). Los focos principales de esta plantilla de análisis son las cuatro cuestiones principales de la investigación y complementariamente las cuatro dimensiones centrales de análisis y evaluación del programa. A saber: **(i)** Conocimientos sobre la estructura conceptual (**EC**) relativa a los tópicos del contenido matemático; **(ii)** Conocimientos sobre los sistemas de representación (**SR**); **(iii)** Conocimientos sobre las calculadoras graficadoras (**CG**); y **(iv)** Conocimientos didáctico (**CD**). Cada uno de estos tipos de conocimientos lo abordamos desde las tres dimensiones cognitivas siguientes: **-**dimensión actitudinal; **-**dimensión procedimental; y –dimensión conceptual. También tuvimos en cuenta el tipo de relación o manejo de estos conocimientos o contenidos de acuerdo con los siguientes niveles o puntos de vista: subjetivo, intersubjetivo, objetivo no autónomo y objetivo autónomo.

Pero, esto no quiere decir que cada tipo de conocimiento lo enfocamos exhaustivamente basándonos en todas estas distintas cuestiones, dimensiones y niveles, ya que la información resultaría desbordante. Por el contrario, teniendo en cuenta la relación esencial entre los distintos tipos y dominios del conocimiento, y basándonos en los hallazgos de los capítulos precedentes, nos limitaremos a considerar principalmente los siguientes aspectos:

1. Aspectos actitudinales y procedimentales (dominio) en relación con las CG.
2. Aspectos conceptuales y procedimentales sobre la EC y los SR.
3. Aspectos conceptuales y procedimentales (teórico-prácticos) del CD.
4. Aspectos relevantes que consideramos son influencias del programa.

Debido a las características del programa, del planteamiento de la investigación misma y de los propios instrumentos empleados para la recogida de datos, este intento de parcelación sólo lo hacemos con propósitos de análisis, porque en la práctica, frecuentemente estas cuestiones las encontramos interrelacionadas de manera indisociable.

En la Sección 5.6. del capítulo anterior realizamos una primera clasificación de los diferentes tipos de alumnos para profesor que participaron en el estudio empírico de la investigación. Tomando como criterio de selección los resultados gráficos de las técnicas de análisis *factorial*, *cluster* y de *escalamiento multidimensional*, complementados y enriquecidos con técnicas de análisis cualitativo, vamos a considerar ahora **tres tipologías de profesores en formación** que denotaremos por **PF-I**, **PF-II** y **PF-III**. Situándonos en el resultado gráfico de la técnica de análisis de *escalamiento multidimensional* (véase Figura 5.8), los profesores en formación del primer grupo o tipología, **PF-III**, tienen como epicentro el tercer cuadrante. Los otros dos agrupamientos, **PF-II** y **PF-I**, corresponden respectivamente al segundo y primer cuadrante (con sus proximidades en los cuadrantes contiguos). Obsérvese que lo grupos de futuros profesores **PF-II** y **PF-I**, por sus proximidades, se podrían considerar formando un grupo o tipología más general.

En este estudio decidimos no hacer análisis individualizado de casos porque con la información que contamos las diferencias entre un alumno y otro en un mismo grupo o tipología no resultan tan "significativas" y el interés principal del estudio consiste en determinar aquellos aspectos comunes que permiten caracterizar cada agrupamiento producido por las distintas técnicas de análisis. Recordemos que nuestros objetos de estudios son el grupo-clase y en general el programa de formación; y estas tres tipologías permiten caracterizar al grupo clase mejor que si hiciéramos una descripción detallada de cada alumno. Para nuestro objetivo principal de estudio (evaluación objetiva y subjetiva del programa), la caracterización de estas tipologías resulta una tarea complementaria que enriquece y da sentido cualitativo a los análisis y discusiones realizadas en el Capítulo V y, tal como lo hemos dicho, lo consideramos un resultado relevante, producto de la investigación.

En este capítulo recogemos con otro sentido, mediante una reconstrucción narrativa de cualidades comunes y mediante la técnica de triangulación, los resultados de los análisis multimétodo, obtenidos de manera segmentada y mediante distintas técnicas en el capítulo anterior, con miras a la determinación y caracterización de tipologías de futuros profesores. Para la clasificación inicial y primeras caracterizaciones de las tipologías hemos tenido en cuenta, básicamente, la escala de actitudes hacia las CG. Recordemos que esta escala intenta evaluar, tanto la predisposición o actitudes (favorable o desfavorable) hacia la tecnología, como el potencial o actitudes de carácter innovador o conservador de los estudiantes para profesor.

A continuación, procedemos a caracterizar la tipología que hemos designado como **tipología de profesores en formación PF-III**. Esta tipología corresponde a los alumnos que están ubicados en el tercer cuadrante del gráfico de *escalamiento multidimensional* (véase Figura 5.8) y que se caracterizan por presentar doble manifestación actitudinal negativa o desfavorable.

6.2. TIPOLOGÍA DE PROFESORES EN FORMACIÓN CON ACTITUD DESFAVORABLE

En términos generales, el grupo de alumnos para profesor que integran la tipología **PF-III** −Antonio, Irene y Mª. Jesús− se caracterizan por mantener durante el desarrollo del curso-taller una predisposición (actitud) desfavorable y poco innovadora hacia la incorporación de la CG en el currículo y en el aula de matemáticas de enseñanza secundaria. Estos alumnos ponen de manifiesto estos tipos de actitudes en sus respuestas a los indicadores de actitudes de orientación tanto positiva como negativa. También lo ponen de manifiesto efectivamente o en la práctica a la hora de hacer propuestas concretas de actividades didácticas. Además, estos alumnos no modificaron sustancialmente su tendencia durante el desarrollo del programa (aunque tampoco la incrementaron).

A continuación, siguiendo la plantilla descrita anteriormente, presentamos los resultados de los análisis y la caracterización de los alumnos para profesor que integran este grupo o tipología (PF-III) en relación con cada una de las cuestiones centrales de la investigación, las cuales hemos organizado en la propuesta del modelo local de los organizadores.

6.2.1. Características en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación

El conocimiento matemático escolar lo concebimos estructurado en conceptos y procedimientos, y simbolizado y procesado mediante diferentes tipos de representaciones. Estas representaciones, no sólo las consideramos fundamentales para la didáctica como disciplina y práctica, sino indisolubles de los propios conocimientos matemático escolares sobre las funciones. La mayoría de los alumnos que participaron en las distintas ediciones del curso-taller tienden a identificar el concepto matemático con su representación simbólica estándar o canónica. Así, por ejemplo, para el concepto de función cuadrática, los alumnos participantes consideraron que coincidía con su representación simbólica-algebraica estándar $y=ax^2+bx+c$:

> *Una función cuadrática es aquella función cuya ley es una expresión cuadrática*(Antonio, Multitareas inicial y final).
>
> *Se llama función cuadrática a la dada por la expresión* $y=ax^2+bx+c$ *con* $a \neq 0$ (Mª. Jesús, Multitareas inicial y final).

Al comenzar el curso a todos los alumnos les advertimos explícitamente que las propuestas didácticas (definiciones, actividades, etc.) en sus distintas tareas deberían ser pensadas para la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas en secundaria. Concretamente, les pedimos que formularan las definiciones teniendo en cuenta que iban dirigidas a estudiantes de segundo de ESO (15/16 años), los cuales verían estos temas por primera vez. Estos alumnos, coherentemente con sus concepciones, relegan a un segundo plano los demás tipos de representación del mismo concepto.

En todas las propuestas didácticas (iniciales y finales) de los alumnos de esta tipología, subyace una concepción parcial o muy limitada (por ejemplo, al sistema de representación simbólica) sobre la estructura conceptual (EC) del conocimiento matemático y sobre su enseñanza, de carácter "formalista" y "academicista" tradicional. Estas propuestas y concepciones no reflejan en nada los fundamentos y orientaciones del curso-taller, que fueron de carácter socioconstructivista, participativo y basado en la resolución de problemas (véase diseño y planificación del curso-taller en el Anexo 1). Se puede atribuir esta dificultad de estos alumnos al fuerte arraigo de las concepciones formalistas y academicistas debida a la conjunción de la formación de origen y de sus propias experiencias escolares como estudiantes de secundaria y universidad. Sus planteamiento y propuestas durante las discusiones conjuntas y en las distintas tareas que presentaron tienen las características descritas, y sus explicaciones y argumentos durante estas discusiones y debates se basan en dichas experiencias personales (véase Anexo 7) y en ningún momento en conocimientos didácticos fundamentales como los que son impartidos en las asignaturas del Plan de Formación de profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática.

No era propósito de esta investigación modificar efectivamente estos puntos de vista sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza, ya que para ello se requiere no sólo un mayor tiempo del que disponíamos para realizar el curso-taller, sino también actitudes favorables e innovadoras, ser abiertos, reflexivos y críticos sobre su propio sistema de ideas al respecto y sobre las nuevas propuestas curriculares planteadas. Pero, por un lado, si es de interés establecer que sin estas condiciones y características básicas un programa de formación como el que hemos realizado no tendrá suficientes garantías de éxito y, por otro lado, nos permite estudiar cómo tendría que ser modificado o ampliado en lo que respecta a su temporalización y objetivos. Los objetivos debieran incluir o referirse también a cuestiones relacionadas con la revisión y modificación del sistema de ideas iniciales de los alumnos para profesor.

Aparte de la manera como los alumnos de esta tipología conciben el conocimiento matemático sostenido por la estructura conceptual (EC) y los sistemas de representación (SR), hay otra cuestión complementaria e importante de señalar. Estos alumnos se caracterizan también por mantener inmodificables a lo largo del curso-taller sus concepciones sobre el contenido matemático y su enseñanza. Solamente una alumna (Mª. Jesús) muestra algunos indicios de modificar su manera de considerar la estructura del conocimiento matemático escolar, al introducir algunos aspectos diferenciados sobre el tratamiento de diferentes sistemas de representación. De todas maneras, se evidencia la gran dificultad que supone romper o descentrase de los esquemas formalistas tradicionales. Por ejemplo, menciona las principales propiedades gráficas (forma, vértice, eje de simetría, etc.) de una función cuadrática, de modo verbal, con apoyo de expresiones algebraicas (aunque no sistemáticamente) y sin recurrir para nada al apoyo visual explícito de imágenes gráficas, a pesar de estar refiriéndose precisamente a propiedades gráficas de la función y de ser mucho más fácil de expresar por parte del profesor y de comprender por parte de los estudiantes. Por ejemplo, "*abscisa del vértice* $-b/2a$", "*forma de la función cuadrática* $y=a(x-h)^2+k$", "*El eje de simetría de la parábola es la recta paralela al eje Oy que pasa por el vértice*", etc.

Como podemos notar, en el discurso matemático de estos alumnos, hay un claro predominio de un lenguaje híbrido entre natural y simbólico-algebraico, con alguna mención de tipo gráfico. Pero, ninguno de estos lenguajes se utiliza de manera sistemática y formal, como lo que son, sistemas de representación. Por eso, no puede considerarse que proponen trabajar efectivamente tratamientos, conversiones ("traducciones") e interrelaciones apropiadas entre un tipo de representación y otro. Los diferentes tipos de representaciones las manejan como si fueran un sólo sistema de representación, sin diferenciar las propiedades ni conversiones entre uno y otro. Además, asumen algunas de estas interrelaciones como si estuvieran dadas implícitamente.

Parece ser que las actitudes desfavorables y poco innovadoras hacia la incorporación de las CG en el currículo están estrechamente relacionadas con sus sistemas de ideas sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Este modo de concebir el conocimiento matemático, radicalmente opuesto a la filosofía didáctica constructivista por la que propugnamos, difícilmente dan cabida a las tecnologías, salvo como un instrumento de "calculo numérico" para "ahorrar tiempo", de "comprobación" o de "refuerzo" en actividades complementarias pero independiente de las demás. Estos alumnos proponen integrar las tecnologías en actividades adicionales y aisladas (por lo general hacia el final de la propuestas) (véanse tareas iniciales y finales en el Anexo 4), mediante procedimientos o problemas que son, de todas maneras tradicionales, y en las que las CG juegan solamente el papel de "herramienta de apoyo" para realizar cálculos y gráficas difíciles, porque, seguramente llevarían demasiado tiempo realizarlos sólo con papel-y-lápiz.

Esta misma alumna (Mª. Jesús), cree que "*la calculadora cierra los caminos para el razonamiento algebraico*" (véase momento M.VII.1 en la transcripción de la sesión VII, Anexo 7). Y opina que "*esta herramienta puede servir como apoyo, pero no para hallar la solución*" del problema o ecuación. Todos los alumnos de esta tipología identificaron el proceso de resolución de una ecuación algebraica con el de "**razonamiento algebraico**". Existen diversos ejemplos e indicios como este, que nos hacen pensar que para estos futuros profesores la posibilidad de llegar a utilizar recursos tecnológicos en la enseñanza de procedimientos matemáticos, también dependen fuertemente de sus creencias o maneras de concebir el **razonamiento algebraico**. Para estos alumnos el **razonamiento algebraico** está relacionado con el uso de las técnicas tradicionales del papel y el lápiz: "*es mejor que los alumnos aprendan primero a hacer las cosas a mano*" (Antonio, episodio E.VII.1, sesión VII). Por consiguiente, las nuevas tecnologías les resultan lógicamente contraproducentes y hasta un "*peligro*" para el desarrollo de tales tipos de conocimientos (procedimentales), debido a que los evita o disminuye. Esto se pone de manifiesto en episodios como el que describimos a continuación.

Mª. Jesús, refiriéndose al desarrollo y comprensión de procedimientos de razonamiento algebraico, tales como obtener mediante el sistema de cálculo simbólico (de la TI-92), la expresión canónica o del vértice, la cual está dada por la expresión $y=a(x-h)^2+k$, a partir de la expresión estándar $y=ax^2+bx+c$, considera que para eso no hace falta la calculadora: "*Yo no veo que haga falta la calculadora para hacer eso*" (Mª. Jesús, episodio E.VII.01)[1]. Cuando uno de sus compañeros (de la tipología PF-I) la contradice diciéndole: "*Hombre, a mí me parece la calculadora un medio genial para hacer estas cosas. Todo lo que economiza y facilita*" (Isaías, episodio E.VII.01). Ella le replica de una manera tajante y riéndose: "*Yo es que no me lo creo*". Otro alumno de esta misma tipología PF-III interviene en el debate diciendo lo siguiente:

> *Sí, es genial, pero, si lo que queremos es razonar algebraicamente, lo que la calculadora hace es darte las soluciones. El proceso de llegar a esa solución, que es el razonamiento algebraico propiamente dicho, ese camino la calculadora te lo cierra... Hombre, yo veo las calculadoras positivas para muchas cosas, pero hay muchas cosas en el álgebra y en la matemática en general que yo creo que se tienen que hacer a mano"* (Antonio, Episodio E.VII.01).

Este mismo alumno cierra el debate con el siguiente comentario:

> *La verdad, yo creo en lo que se ha comentado sobre los peligros que tienen las calculadoras... Pienso que a la calculadora hay que tenerle cuidado porque pueden ser peligrosas. Que primero hay que dominar las cosas teóricamente con el papel y el lápiz y después que lo hayas dominado, entonces sí la calculadora puede llegar a ser un elemento buenísimo, porque te ahorra un montón de tiempo. Pero, ¿y si la calculadora te falla?... Por ejemplo, cuando me di cuenta que con la calculadora se pueden calcular máximos y mínimos sin tener conocimientos de derivadas, dije, hombre, los niños tienen que aprender primero cómo se hace eso.*" (Antonio, Episodio E.VII.01).

Como podemos comprobar, para estos alumnos razonar algebraicamente (esto también forma parte de sus sistemas de ideas sobre la naturaleza del conocimiento matemático y su enseñanza) consiste en desarrollar un algoritmo algebraico utilizando las tecnologías tradicionales del papel-y-lápiz, no un proceso en el cual y mediante el cual se utilizan y relacionan conceptos, procedimientos y otras ideas y técnicas con el propósito de resolver un problema u obtener una conclusión. Las nuevas tecnologías como las CG "*no hacen*

[1] Durante este episodio (E.VIIS.01), el debate trataba sobre las ventajas y desventajas que suponía el uso del sistema de cálculo simbólico de la TI-92 para el "**razonamiento algebraico**".

falta para hacer eso" "*yo no lo creo*", y si acaso lo pudieran llegar a hacer serían un "*peligro*", porque impiden o "*cierran los camino del razonamiento algebraico*", el cual, para estos alumnos, consiste en hacer cosas como, resolver una ecuación o simplificar alguna expresión utilizando el papel y el lápiz. "*Los niños tienen que aprender primero esto*". Y después, cuando lo hayan aprendido y "*lo dominen teóricamente con el papel y el lápiz*", entonces si podrán utilizar la calculadora, para hacer los cálculos de una manera más rápida o para comprobar los resultados que se hayan obtenido previamente mediante el método canónico y tradicional de la disciplina matemática y su enseñanza.

Los esquemas sobre la estructura conceptual que la mayoría de este tipo de alumnos tienen sobre el contenido matemático, reflejados en sus diagramas conceptuales, confirman las observaciones anteriores. Por ejemplo, observemos en las Figuras 6.1 y 6.2 los diagramas conceptuales iniciales y finales de Antonio y Mª. Jesús, respectivamente. Estos dos pares de diagramas, junto con los de la otra alumna (Irene) que integra esta tipología de futuros profesores (véase Figura 5.2) constituyen ejemplos de bajo nivel de complejidad estructural y de bajo nivel de modificación estructural entre las fases inicial y final del curso-taller. La tipología gráfica simple de estos diagramas, tipo diagramas de árbol o sinópticos, permiten constatar que desde un punto de vista didáctico las concepciones y representaciones estructurales que estos alumnos y alumnas tienen sobre el contenido matemático a ser enseñado, es de carácter organizado y jerarquizado en compartimentos estanco y a ser presentado y desarrollado de forma lineal. Esta es una concepción y presentación del contenido matemático típicamente clásica (tradicional) en los ámbitos educativos y académicos matemáticos.

Figura 6.1.
Diagramas conceptuales inicial y final de Antonio

Diagrama inicial de Antonio

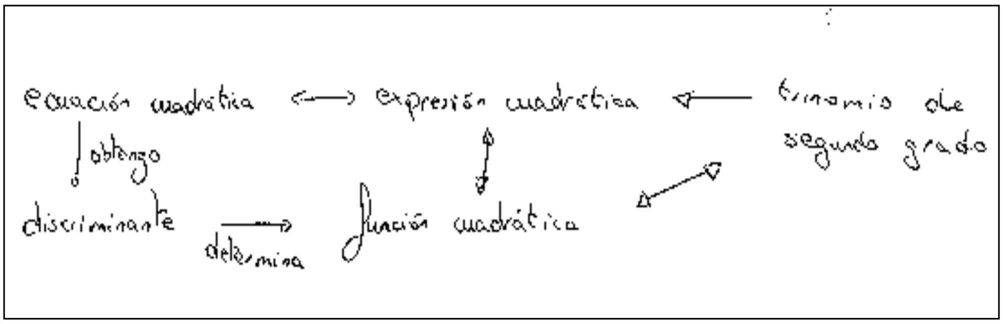


Diagrama final de Antonio

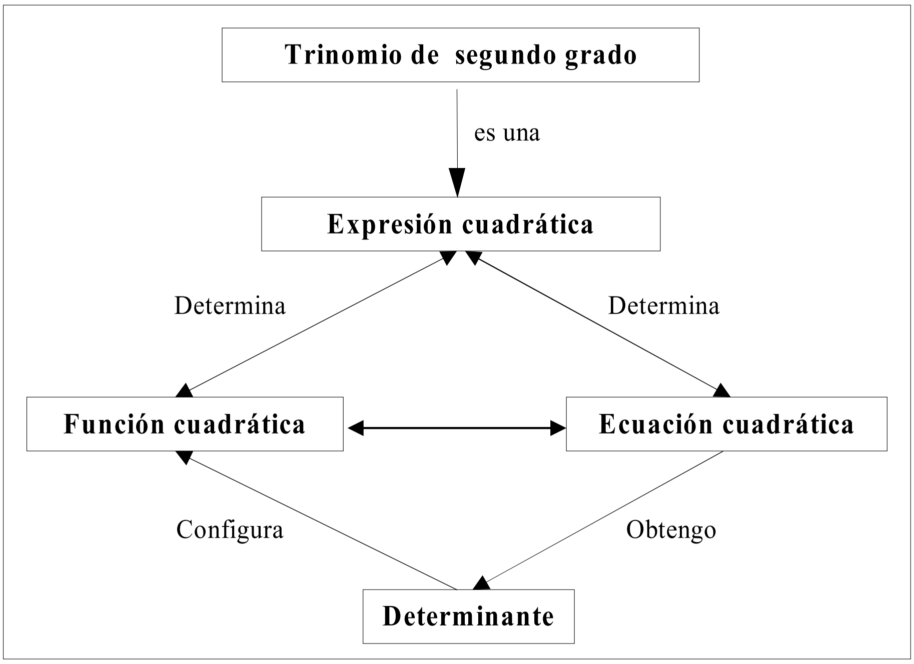


Figura 6.2.
Diagramas conceptuales inicial y final de Mª. Jesús

Diagrama inicial de Mª. Jesús

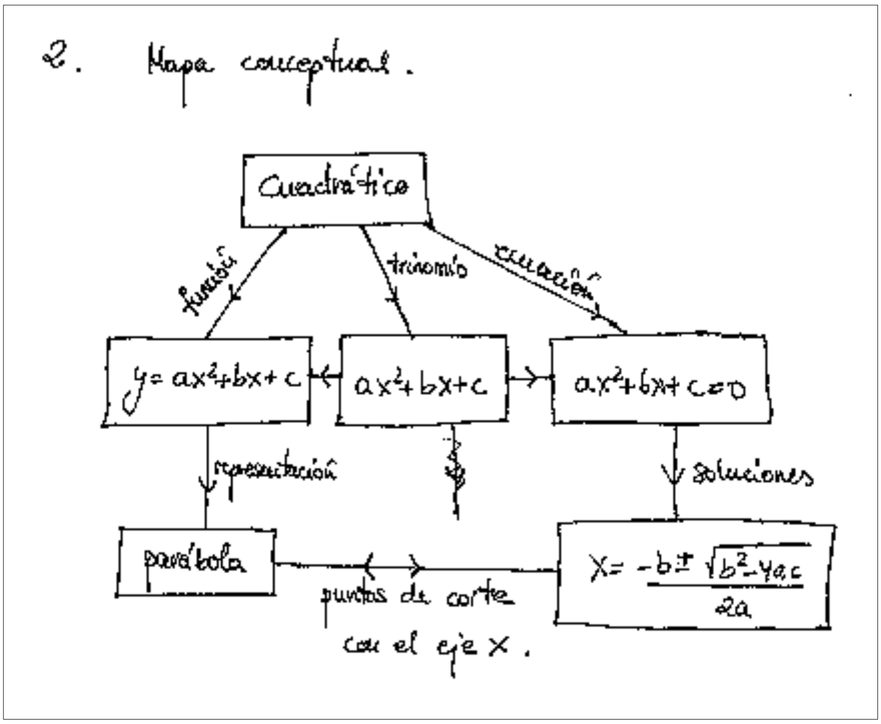
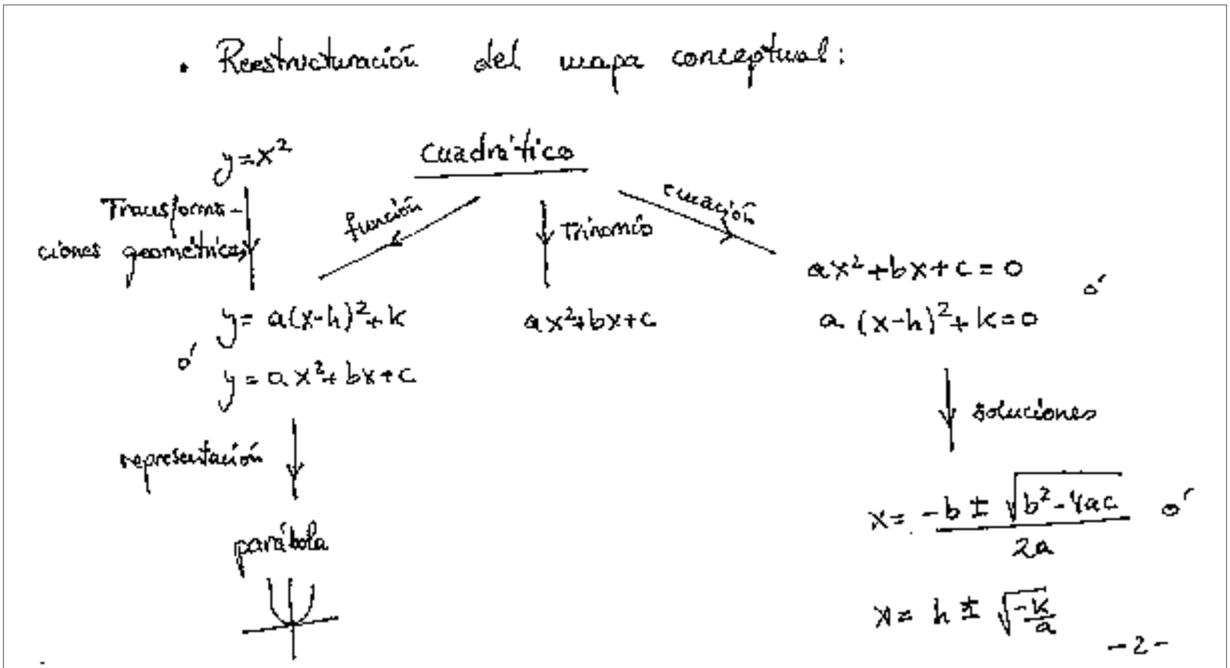


Diagrama final de Mª. Jesús



Por otra parte, los análisis cuantitativos que hicimos en el apartado 5.2 mostraron que justamente estos tres alumnos tuvieron los resultados más pobres con respecto al grupo-clase y los otros conglomerados tipológicos y en relación con la riqueza de ítems, complejidad (índice de elaboración IE), tipo gráfico de diagrama y modificaciones inicial-final del curso-taller. En la Tabla 6.1 siguiente presentamos un extracto de la Tabla 5.6 dada en la Sección 5.3.1, con la relación inicial-final de número de ítems, nódulos, conectivos e índices de elaboración de los diagramas presentados por los alumnos de esta tipología en sus multitareas iniciales y finales, respectivamente.

Tabla 6.1.
Variación inicial/final (en %) de ítems, nódulos, conectivos e índices de elaboración (IE) en los diagramas conceptuales del grupo de alumnos PF-III.

ALUMNOS	DIAGRAMAS INICIALES				DIAGRAMAS FINALES							
	Ítems	Nóduls	Conect.	IE	Ítems		Nódulos		Conectivos		IE	
					nº	Var.	nº	Var.	nº	Var.	IE	Var.
Antonio	5	5	6	3,2	5	0%	5	0%	6	0%	3,2	0%
Irene	11	6	5	2,0	11	0%	7	17%	6	20%	2,2	10%
Mª. Jesús	12	6	8	2,2	17	42%	7	17%	6	-25%	1,8	-18%
TOTALES	**28**	**17**	**19**	**2,5**	**33**	**18%**	**19**	**12%**	**18**	**-5%**	**2,4**	**-4%**
Grupo-clase	92	52	49	2,1	114	24%	80	54%	82	67%	2,4	14%

Como podemos comprobar, la variación inicial/final es, negativa (-4%) para todo el grupo. Individualmente, en un caso es nula (0%) y en otro negativa (-18%). En comparación con el grupo-clase y los demás grupos por tipologías, los resultados del grupo PF-III son relativamente bajos. El cálculo de los porcentajes de este grupo con respecto a loa resultados globales del grupo-clase son los siguientes: ítems, 30%; nódulos, 33%; conectivos, 39% e índice de elaboración, 36%, correspondientes a los diagramas iniciales; e ítems, 29%, nódulos, 24%, conectores, 22% e índice de elaboración, 23%, correspondientes a los diagramas finales.

En el único caso en que ha habido un ligero incremento, por ejemplo en la complejidad medida por el IE (véase el caso de Irene, 10%), consideramos que, en cierta forma, es debido a las aportaciones del curso-taller, especialmente en relación con la incorporación de otras alternativas sobre la pluralidad e interrelación de los diferentes sistemas de representación (SR) sobre los cuales trabajamos con mucho énfasis. Desde nuestra perspectiva, este organizador (referido a los múltiples SR), aparte del papel ya reconocido que tiene para la enseñanza y comprensión de las funciones, juega un papel didáctico fundamental en relación con la incorporación de las nuevas tecnologías de representación en las propuestas curriculares y didácticas de los futuros profesores de matemáticas. De esta manera, el mismo papel de andamiaje que jugarían estos dos organizadores (los múltiples SR y las NTR) para la enseñanza de las funciones, lo tendrían también mutuamente o entre sí. Las nuevas tecnologías con sistemas de representación múltiples y de cálculo simbólico integrados constituyen un poderoso instrumento de movilización, ejecución, interrelación y visualización apropiadas de los distintos SR.

Los datos suministrado de la Tabla 6.1 ponen de manifiesto que globalmente solamente hay un incremento en los ítems (18%) y en los nódulos (12%). En cambio, la disminución en los conectivos relacionales (-5%) produce a la vez un incremento negativo del índice de elaboración (-4%).

Por otra parte, observamos que los esquemas de la estructura conceptual, visualizadas mediante los distintos tipos de gráficos de los diagramas (de árbol o sinópticos), estos alumnos los mantienen prácticamente inmodificables. Sin embargo, hay que reconocer que en el caso de Mª. Jesús tienen cierta relevancia los intentos por introducir modificaciones en el enriquecimiento de la estructura conceptual del contenido matemático, a través de la incorporación y tratamiento de algunos aspectos diferentes relacionados con las representaciones. Claro que, de igual manera que en las definiciones, mantiene un mayor énfasis en el sistema de representación simbólico-algebraico. A estos alumnos les sigue costando descentrarse de este tipo de representaciones e introducir tratamientos sistemáticos y adecuados de los conocimientos matemáticos en los demás SR, como el gráfico, el numérico y el verbal. Por ejemplo, cuando mencionan representaciones gráficas, lo hacen de una manera casi anecdótica, como si ésta fuera solamente un dibujo que sirve para ilustrar la expresión algebraica, que, tal como lo hemos dicho, estos alumnos identifican con el propio concepto en cuestión.

No queremos dejar de mencionar que los tratamientos algebraicos que proponen algunos alumnos (como por ejemplo, Mª. Jesús) como complemento de las actividades de introducción, motivación y desarrollo en sus multitareas, relacionados con las transformaciones algebraicas de expresiones cuadráticas, partiendo de la expresión funcional $y=x^2$ y llegando a las expresiones generales estándar $y=ax^2+bx+c$, canónica del vértice $y=a(x-h)^2+k$ y en factores lineales $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, con apoyo visual en el sistema de representación gráfico, por ejemplo, explorando diferentes patrones de familias de parábolas y utilizando las múltiples posibilidades de las CG, constituyó uno de los enfoques y actividades trabajadas con mayor énfasis en el curso-taller. No obstante, a pesar de los tímidos intentos de modificación de concepciones sobre los tópicos matemáticos y su enseñanza**,** podemos concluir que la influencia de los contenidos y experiencias desarrolladas durante la realización del curso-taller ha sido mínima. Estas modificaciones han tenido que ver solamente con los SR y de manera parcial. Los alumnos no consiguieron introducir en sus propuestas didácticas un tratamiento más amplio e interrelacionado de los distintos SR en juego, ni articular adecuada y simultáneamente diferentes aspectos de los distintos organizadores del currículo de los que nos ocupamos.

En conclusión, consideramos que las propuestas didácticas de estos alumnos, derivadas de concepción formalista, academicista y tradicional, constituyen un importante obstáculo que dificultan seriamente las posibilidades de incorporación y utilización efectiva de las nuevas tecnologías de representación múltiple en el currículo y el aula de matemáticas de educación secundaria. Este hecho podría explicar el por qué estos alumnos para profesores, cuando usan la tecnología en sus propuestas didácticas, solamente la utilizan como un instrumento de cálculo, de apoyo para obtener o dibujar una gráfica, o para verificar resultados previamente obtenidos mediante las técnicas tradicionales basadas exclusivamente en el papel y el lápiz.

6.2.2. Características del grupo PF-III en relación con el conocimiento y actitudes hacia la calculadora graficadora

En el Apartado 5.2 observamos que todos los alumnos del curso-taller mostraron indicadores de actitudes tanto favorables como desfavorables hacia la incorporación de las CG en el currículo de educación secundaria así como un potencial innovador al respecto. Sin embargo, los alumnos de la tipología **PF-III** mostraron un mayor índice en las actitudes desfavorables (por debajo de la media). Recordemos que estos alumnos resultaron agrupados en el tercer cuadrante del gráfico de escalamiento bidimensional, el cual corresponde a aquellos alumnos para profesor caracterizados por mantener durante el desarrollo del curso-taller una predisposición desfavorable hacia la utilización de la CG en el aula de matemáticas y un potencial actitudinal conservador y tradicionalista en relación con esta tecnología. En la Tabla 6.2 siguiente mostramos las medias (entre 1 y 5) de las respuestas de estos alumnos a la encuesta inicial y final de la escala de actitudes y el porcentaje de las variaciones de estos.

Tabla 6.2.
Resultados iniciales, finales y porcentaje de la variación de la escala de actitudes correspondientes a los alumnos de la tipología PF-III.

ALUMNO	INICIAL	FINAL	Variación i/f
Irene	3.1	3.5	13%
Antonio	3.2	3.5	9%
Mª. Jesús	3.5	3.3	-6%
Promedio PF-III	**3.3**	**3.4**	**3%**
Promedio grupo-clase	**3.7**	**3.9**	**5%**

El promedio de los tres alumnos de la tipología PF-III en la escala final (3.4), así como la variación inicial/final (3%) no sólo es inferior al promedio y variación del grupo-clase (3.9 y 5%, respectivamente), sino que sus resultados son los bajos entre las tres tipologías de futuros profesores. Además, en esta ocasión tampoco modificaron (ni disminuyeron ni incrementaron) sustancialmente sus actitudes hacia el final del curso-taller. Obsérvese además que la dispersión de resultados (máxima distancia con respecto a la media del grupo) de estos tres alumnos es menor en la fase final (0.2) que en la inicial (0,4), indicando que tendieron a homogeneizarse más como grupo y tipología.

La Tabla 6.3 siguiente nos muestra las asignaciones numéricas totales para las respuestas iniciales y finales de la escala de actitud de los tres alumnos de esta tipología, así como sus respectivos porcentajes de variaciones entre la escala inicial y final.

Tabla 6.3.
Asignaciones numéricas a las respuestas iniciales y finales de los 40 ítems de la escala de actitud por parte de los profesores en formación de la tipología PF-III.

Alumnos	Asign. inicial	Asign. final	Variación i/f
Antonio	128	140	9%
Irene	124	142	11%
Mª. Jesús	141	133	-6%
Asign. media	131 (3.3)	138 (3.5)	5%
Asign. media total	147 (3.7)	159 (4.0)	
Variación global	27%	25%	

Como podemos observar, en este caso también, para este grupo, las variaciones individuales y media, entre el comienzo y el final del curso-taller son relativamente bajas (5%). Además, las asignaciones medias inicial (131 o 3.3) y final (138 o 3.5), son respectivamente inferiores a las asignaciones medias inicial (147 o 3.7) y final (159 o 4.0) de todo el grupo-clase. Pero, estas tendencias desfavorables o negativas hacia la incorporación de las CG en el currículo y la enseñanza de las matemáticas no sólo se reflejaron en las respuestas de estos alumnos a las encuestas de actitudes, sino también en otras producciones e intervenciones durante las distintas fases del curso taller. Desde nuestro punto de vista y de acuerdo con Sarabia (1992, p. 135), las opiniones que expresan "posicionamiento evaluativo o predictivo" también constituyen indicadores actitudinales de las personas. Estos alumnos, por ejemplo, en sus respuestas a la encuesta de evaluación final del curso-taller, al referirse a los supuestos peligros que supondría la incorporación de las CG en el currículo y aula de matemáticas de Secundaria, coinciden en expresar opiniones desfavorables, de disensión o desestimación de estas tecnologías.

Por ejemplo, Antonio considera que:

> *La calculadora puede provocar que el alumno olvide las técnicas de representación y de obtención de las propiedades de una parábola. También se puede atrofiar el razonamiento numérico y algebraico debido a la total dependencia de la calculadora por parte del niño. Y puede suceder que algunos niños no se sientan atraídos por estas tecnologías, provocando así el rechazo hacia las matemáticas.* (Antonio, Encuesta de evaluación final).

Otros alumnos también expresan sus preocupaciones desfavorables y de desestimación, aunque de una manera menos categórica. Por esta razón no presentamos todas sus opiniones. Por ejemplo, veamos lo que Irene opina acerca de probables inconvenientes de las CG:

> *Muchas veces cuando se comete un error, no se sabe realmente cuál es el problema, sobre todo porque la pantalla visualiza el posible error en inglés*(Irene, Encuesta de evaluación final).

Las actitudes desfavorables y poco innovadoras de los alumnos de esta tipología en relación con la tecnología, se pone de manifiesto también en la reducida presencia de éstas en sus multitareas finales y su casi total ausencia en las iniciales. Esto no nos debería extrañar si tenemos en cuenta que todos los alumnos reconocieron al comenzar el curso no haber tenido experiencia previa alguna con ninguna de estas CG. Pero, en las distintas entrevistas e intervenciones personales pudimos constatar que la mayoría de ellos tenían conocimientos y habían tenido algún tipo de experiencia como usuarios de otras tecnologías informáticas similares (por ejemplo, los *software* educativos *Derive* y *Mathematica*), sin embargo, tampoco las tuvieron en cuenta en sus propuestas de actividades didácticas, es decir, actividades diseñadas y planificadas para la enseñanza, aprendizaje y evaluación de alguno de los tópicos o temas estudiados.

De todas maneras, debemos reconocer que todos los alumnos integrantes de esta tipología pusieron de manifiesto haber experimentado alguna modificación en relación con la introducción de la CG en las actividades propuestas para las tareas finales. Aunque en la práctica, la mayoría de las veces, no lo hacen de una manera efectiva, en el sentido de seguir las orientaciones didácticas y prácticas del curso-taller. Para el diseño y realización de este curso procuramos tener en cuenta los más importantes y recientes desarrollos relacionados con el uso de las nuevas tecnologías en la educación matemática. Sin embargo, en estos alumnos, parece que siguieron primando sus conocimientos didácticos aprendidos a través de su propia experiencia escolar (Blanco, 1996), así como los conocimientos "*formales y academicistas*" que tienen sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje (Flores, 1998*b*). Conocimientos que han sido adquiridos en buena parte durante dicha experiencia escolar. Así, por ejemplo, Antonio y Mª. Jesús, conciben las CG como instrumentos de "*cálculo*", "*comprobación*" y "*refuerzo*" de resultados y procedimientos, que, desde sus puntos de vista, se deben realizar primero a mano con el papel y el lápiz. Por ejemplo, Antonio, ahora preocupado (en su tarea final) por trabajar sobre las relaciones entre diferentes tipos de representaciones de la función cuadrática, propone utilizar la CG del siguiente modo:

> *Posteriormente como actividad de refuerzo, pues el objetivo es que los estudiantes sepan la relación existente entre la gráfica, su expresión (algebraica) y su tabla de valores* (Antonio, Tarea final).

Este alumno considera que primero hay que aprenderlo sin la calculadora y luego si se puede usar esta tecnología pero como "*refuerzo*" de lo (supuestamente) aprendido:

> *En un principio no se podrá utilizar la calculadora. Luego, utilizando la calculadora, los alumnos volverán a realizar las actividades anteriores* (Antonio, Tarea final).

Como podemos comprobar, esta es una idea ingenua y paradójica acerca de las posibilidades curriculares de estas modernas tecnologías. Este alumno propone utilizar las CG solamente después de que el estudiante haya comprendido y tenga cierto dominio de los conceptos y procedimientos en cuestión, en contravía con las orientaciones del curso-taller, que consistían en utilizar la tecnología, precisamente para lograr o desarrollar esta comprensión y dominio. Además, esta es toda la utilización didáctica de la CG que propone Antonio en su multitarea final: como una herramienta para realizar solamente "*Actividades de refuerzo*". Este alumno y sus demás compañeros de tipología, tampoco la incluyen ni permiten que se utilice en las pruebas de evaluación, para las cuales proponen los problemas típicos sobre funciones o ecuaciones cuadráticas como, por ejemplo, "*hallar dos números consecutivos cuya suma sea*..." tal. En la encuesta de evaluación final del curso-taller cuando se pregunta sobre la posibilidad de permitir el uso de la CG en los procesos de evaluación en el aula, Antonio contesta que "*en mi opinión esto es más complicado de lo que parece*", y advierte que si se permitiera usar estas tecnologías en la evaluación "*habría que darle un cierto valor al* *manejo de la calculadora, pero sin olvidar que estamos en clase de matemáticas*" (Antonio, Encuesta de Evaluación Final del curso-taller).

Otra alumna (Mª. Jesús) integrante de esta tipología, también introduce algunas modificaciones de su tarea inicial con el fin de incorporar la tecnología, pero, igual que sus demás compañeros, también lo hace en determinados momentos y no sistemáticamente o permitiendo el uso libre por parte de los estudiantes. En su caso propone usarla "*como instrumento de motivación*". Desde nuestro punto de vista, consideramos que inicialmente propone usarla de una manera adecuada para motivar la introducción del nuevo tema elegido por ella como el más importante: la "*función cuadrática y forma de su gráfica*". Para ello propone la siguiente actividad:

Dados los puntos en $\mathbb{R}^2$ *con las coordenadas siguientes:*

x	0	1	2	5	-5	-2
y	0	1	4	25	25	4

Introduce los datos de la tabla en una calculadora y obtén la expresión algebraica de esta relación y la gráfica que pasa por estos puntos. Intenta relacionar la expresión algebraica con la forma de la gráfica (Mª. Jesús, Multitarea final).

Además, introduce otra modificación didáctica sustancial a su propuesta inicial que consiste en "*organizar el trabajo en el aula en grupos pequeños, con la asistencia del profesor*". Anteriormente, simplemente proponía un problema típico a toda la clase. Sin embargo, inmediatamente después que se ha obtenido la expresión algebraica y la gráfica de la función cuadrática correspondiente, se olvida completamente de la CG y vuelve a centrarse en el método de enseñanza tradicional y formalista. Luego, al final de haber introducido y desarrollado el tema, vuelve a proponer el uso de la CG en unas "*Actividades de refuerzo y ampliación*", pero, a diferencia del uso que propone en la introducción y motivación, en esta ocasión propone usarla para comprobar que los resultados obtenidos mediante el método tradicional son correctos. Esta actividades "*de refuerzo y ampliación*", que denominamos como tradicionales, consisten en una serie de situaciones-problema en los que, unas veces, se da la expresión algebraica de una función o ecuación cuadrática y, otras veces, hay que obtener dicha expresión algebraica que lo modeliza, para luego deducir u obtener algunas de sus propiedades algebraicas y gráficas (como, por ejemplo, las coordenadas del vértice, de los puntos de intersección con los ejes de las abscisas, etc.) de dicha función o ecuación. Al final de todo esto, propone utilizar la tecnología para comprobar que las gráficas y demás resultados obtenidos son correctos:

> *Ahora comprueba con tu calculadora gráfica que tus resultados obtenidos son correctos*(Mª. Jesús, Multitarea final).

Finalmente, en su multitarea final, como sus demás compañeros de tipología, esta alumna considera que no se debiera permitir usar la CG en las pruebas de evaluación:

> *La prueba de evaluación coincide con la de la tarea inicial, pero sin introducción de la calculadora gráfica. La calculadora la veo muy bien como apoyo para la comprensión de los conceptos, pero una vez que han sido adquiridos el alumno debe estar suficientemente capacitado para realizar un examen sin necesidad de calculadora* (Mª. Jesús, Multitarea final).

En conclusión, nos parece pertinente decir que, de todas maneras, estos alumnos empiezan a introducir y proponer en sus tareas finales actividades para ser desarrolladas mediante el uso de la CG. Pero lo hacen de una forma inapropiada, porque se basan en ideas limitadas acerca de la utilidad o papel que le atribuyen a la CG como recurso didáctico. Para ellos es simplemente una herramienta de refuerzo, ahorro de tiempo y de esfuerzos y para realizar cálculos y obtener gráficas difíciles. Por ejemplo, Irene, modificando en muy poco sus propuestas de actividades didácticas iniciales, agrega al final de las actividades de introducción y desarrollo del tema en su multitarea final un apartado de actividades especiales para resolver con calculadora. Esta alumna, tampoco introduce ni permitiría el uso de las tecnologías en su propuesta de evaluación.

La mayoría de los libros de texto actuales de matemáticas de secundaria, que se han empezado a "adaptar" a las NTR, se limitan a agregar secciones adicionales de ejercicios para que sean resueltos mediante utilización de la tecnología. "Coincidentemente" estos ejercicios suelen estar basados en ideas similares a las que han puesto de manifiesto los alumnos de esta tipología de profesores en formación (PF-III): como ejercicios especiales y aparte de los demás o de "apoyo y refuerzo" para ser resueltos con la tecnología, para realizar cálculos y obtener gráficas que resultarían muy difíciles o extensos sin utilizar la tecnología (ejercicios que, por lo general, sólo se diferencian en que tienen números con muchas cifras decimales), y para comprobar resultados obtenidos mediante procedimientos tradicionales de papel-y-lápiz. Este fenómeno editorial, constituye otro importante factor de influencia (en muchos casos inapropiada) para los profesores sobre el desarrollo de su CD.

6.2.3. Características del grupo PF-III respecto a sus conocimientos didácticos

Empecemos por señalar que en las multitareas iniciales, la única alumna entre esta tipología de estudiantes para profesor, que considera explícitamente alguna cuestión relativa a la enseñanza-aprendizaje (por ejemplo, en el diagrama conceptual de la Figura 6.2), diferente de los aspectos conceptuales referidos directamente al contenido matemático, es Irene. Considera las siguientes cuestiones: "conceptos previos", "dificultades de interpretación" y aspectos de "fenomenología" con propósitos didácticos sobre las distintas nociones del CM. Pero en el diagrama conceptual final, a pesar de que se trataba de una ampliación y mejoramiento del inicial y, a pesar de que lo enriquece lexicográficamente con cuestiones sobre los SR gráfico y algebraico, elimina todos los aspectos referidos a los procesos de enseñanza-aprendizaje y se centra exclusivamente en las cuestiones relativas a la estructura conceptual.

Tal y como se sabe, resulta inevitable que el sistema de ideas y experiencias que tienen los alumnos para profesor sobre el conocimiento matemático y sobre el papel de las nuevas CG en el currículo y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas aparezcan reflejadas implícita o explícitamente a la hora de analizar, describir y caracterizar su conocimiento didáctico sobre estos contenidos y tecnologías. Como señala Thompson (1992) basándose en Ernest (1988):

> *Among the many key elements that influence the practice of mathematics teaching, three are most notable: 1. The teacher's mental contents or schemas, particularly the system of beliefs concerning mathematics and its teaching and learning; 2. The social context of the teaching situation, particularly the constraints and opportunities it provides; and, 3. The teacher's level of thought processes and reflection* (p. 131).

Como consecuencia del modo clásico, formalista y academicista de concebir el conocimiento matemático, expresado en un híbrido de lenguajes simbólico, algebraico y natural sin ninguna sistematicidad, los alumnos y futuros profesores de esta tipología tienen a su vez una concepción de la enseñanza, quizás basada en los procesos tradicionales de transmisión-adquisición de los conocimientos, que se sustentan por estas vías algebraica y verbal. Estos estudiantes identifican al conocimiento matemático en cuestión con esta única manera (simbólico-algebraica) de representarlo. Se verifica así, de alguna forma, la afirmación de Roulet (1998) acerca de que los "*teachers with instrumentalist and Platonist views maintained their traditional teaching styles with an emphasis on basic skills and computation* (Roulet, 1998). O como dice Hersh (1986) citado por Dossey (1992), "*A teacher who has a formalist philosophy will present content in a structural format, calling on set theoretic language and conceptions*" (p. 42). Además, estos alumnos, asumen como implícita la comprensión de muchas expresiones verbales, algebraicas y gráficas que expresan, por una parte, nociones y procedimientos que son propias de las matemáticas y que, por otra parte, sus significados son claves para la comprensión y aprendizaje de la estructura conceptual en cuestión.

Otro problema que hemos detectado en este tipo de estudiantes, estrechamente asociado con el anterior y que además se complica más con su predisposición o actitud desfavorable y poco innovadora en relación con las CG, es que no les permite acceder efectiva y eficazmente a estas tecnologías como recursos curriculares o didácticos. La integración y utilización de las CG en las distintas propuestas didácticas de estos alumnos, incluyendo las tareas finales, fue mínima e inadecuada en unos casos y nula en otros. Creemos que esto se debe a sus maneras de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza, su predisposición desfavorable hacia la tecnología y, porque, al no modificar o flexibilizar sus esquemas de conocimiento y experiencia sobre las matemáticas y su enseñanza, la tecnología la asumen como un objeto extraño e "interesante" para aprenderlo a usar y utilizarlo en secciones apartes y especiales, o como instrumentos de apoyo para hacer cálculos que son difíciles de hacer con papel-y-lápiz, o para ahorrar tiempo, o para comprobar resultados obtenidos mediante los métodos tradicionales. La mayoría de estos alumnos consideran que las CG se deberían "estudiar" en horarios y secciones especiales y adicionales, dentro o fuera de la clase de matemáticas. Esta especie de descentramiento o desviación de la atención del objeto de estudio (el conocimiento matemático) hacia sus medios y recursos (en este caso las CG), es uno de los principales problemas y dificultades que a través de nuestra experiencia hemos encontrado entre los profesores en formación y en ejercicio; sin embargo, son muy pocos los estudiantes que no la utilizan de manera espontánea como una herramienta o medio para resolver sus necesidades y situaciones educativas.

Con el fin de ilustrar las anteriores afirmaciones analicemos algunas de las actividades que proponen estos alumnos para la introducción, motivación y desarrollo del tema elegido como el más importante o difícil de enseñar o aprender sobre el CM. Estas actividades, como podemos comprobarlo en la Sección 5.3.3 del capitulo anterior o en el Anexo 4 sobre las producciones de los alumnos, las proponen en sus multitareas iniciales y las mantienen en las finales, indicando así que no han modificado sus maneras de significar el conocimiento matemático con propósitos escolares, aun a pesar de que en las multitareas finales proponen introducir la CG, aunque de una manera muy puntual e ineficiente. Así, por ejemplo, Mª. Jesús propone la siguiente actividad de introducción, motivación y desarrollo del tema en su tarea inicial:

> *Dados los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 4), (5, 25), (-5, 25), (-2, 4). Represéntalos gráficamente y observa qué tipo de función obtienes...*
> (Mª. Jesús, Tarea inicial: Introducción, motivación y desarrollo del tema).

Posteriormente, en su tarea final esta misma alumna propone lo siguiente:

Hago una introducción, motivación y presentación con el mismo ejercicio propuesto en la tarea inicial, sólo que ahora se usa la calculadora para obtener la gráfica que pasa por estos puntos y la expresión algebraica de esta relación. (Mª. Jesús, Tarea final: Introducción, motivación y desarrollo del tema).

Los otros dos alumnos de esta tipología proceden de manera similar manteniendo la misma actividad inicial e introduciendo la CG de una manera muy puntual (Antonio, véase sección 5.3.3.) o en un epígrafe especial posterior (véase tarea final de Irene en Anexo 4). Estos alumnos, además de mantener la actividad inicial de carácter tradicional, en sus multitareas finales agregan una sección especial de "*refuerzo*" para trabajar con la CG. Esquemáticamente, la estrategia didáctica inicial de todos estos futuros profesores corresponde con la presentada en la Figura 5.15, para el caso particular de Antonio. Esta estrategia consiste en la modelización (traslación) de una situación-problema artificial mediante una expresión algebraica, poniendo el énfasis en la relación funcional entre las variables involucradas. Este tipo de estrategia didáctica la consideramos tradicional, estrechamente relacionada con una concepción, igualmente tradicional (formalista) sobre el conocimiento matemático escolar.

Obsérvese como en las propuestas de introducción, motivación y desarrollo del tema por parte de estos alumnos, está exclusivamente centrada en el sistema de representación algebraico, aunque con referencias al lenguaje natural, es decir, sin utilizar sistemáticamente el lenguaje simbólico que le es propio. Además, las tecnologías no son tenidas en cuenta para nada. Esto, era de esperarse, toda vez que estos alumnos han reconocido no haber tenido antes ninguna experiencia ni información sobre las posibilidades didácticas de estos recursos tecnológicos. Sin embargo, sí expresan opiniones desfavorables sistemáticamente. Desde un punto de vista cualitativo, este tipo de razones son las que nos han llevado a caracterizar a estos alumnos como con actitudes y predisposición desfavorable hacia la utilización de las CG en el currículo y enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria.

Veamos algunos de los indicadores de modificaciones que estos alumnos han experimentado durante el desarrollo del programa en relación con su CD. Consideremos concretamente el caso de Antonio en su propuesta de ampliación del tratamiento didáctico para la introducción, motivación y desarrollo del tema en su multitarea final. Este alumno comienza planteando la necesidad de considerar simultánea y complementariamente (como algo añadido, aunque lo consideramos un avance importante) las representaciones algebraicas y gráficas:

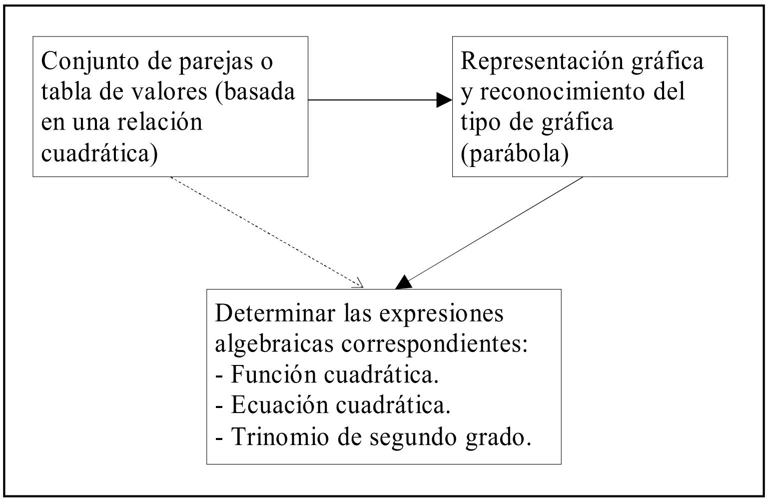
> *El estudio de las funciones de segundo grado no se debe limitar al estudio de la ecuación cuadrática asociada, ni a la representación gráfica. Debemos recordar que estos dos estudios se encuentran estrechamente relacionados y se complementan mutuamente* (Antonio, Tarea final: Introducción, motivación y desarrollo del tema).

Este cambio significativo, refleja claramente las influencias del programa, basado entre otros criterios en descentrar la enseñanza de las funciones en los primeros niveles de Secundaria (14-16 años) del sistema de representación algebraica. Sin embargo, esto mismo no se pone de manifiesto sistemáticamente en el resto de la propuesta didáctica de este alumno en su multitarea final. Por este tipo de razones es que concluimos que los alumnos de esta tipología introducen ciertas modificaciones en sus propuestas didácticas aunque de forma puntual:

> *Nos centraremos en un caso concreto y posteriormente se generalizará. Le vamos a dar al niño una secuencia de puntos correspondientes a la parábola* $y=x^2$ *en una tabla. Estos puntos son: (0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-3,9). Se le pedirá que represente estos puntos sobre unos ejes de coordenadas. Verá que la función es una parábola. A continuación le pedimos que intente encontrar la función que modeliza esta gráfica* (Antonio, Multitarea final: Introducción, motivación y desarrollo del tema).

En esta propuesta, el alumno intenta interrelacionar tratamientos en los tres sistemas de representación usuales (algebraico, numérico y gráfico), aunque sin considerar los aspectos específicos de cada sistema como tal. Asume que las relaciones y conversiones entre un tipo de representación y otro están dadas implícitamente. Además, el tratamiento que propone sigue siendo de carácter técnico o instrumental y centrado en la representación algebraica del concepto y no en sus propiedades, o sea, en el mismo concepto. Podemos decir que la ampliación que estos alumnos hacen de su propuesta de orientación didáctica está pensada para introducir actividades de articulación de diferentes sistemas de representación y para utilizar la CG, pero de manera complementaria y como herramienta de apoyo. Esquemáticamente la propuesta (modificación) del tratamiento didáctico que hacen en sus multitareas finales tiene la estructura que presentamos en la Figura 6.4.

Figura 6.4.
Esquema de la estrategia didáctica de los alumnos de la tipología P-III.



Resulta difícil articular esta propuesta con la propuesta inicial que de todas maneras mantienen hasta el final del curso. Tal vez, se podría sustituir los niveles I y III del esquema dado inicialmente por esta propuesta de ampliación. Pero, al analizar más en profundidad los distintos planteamientos de estos alumnos nos inclinamos por considerar que en realidad son propuestas diferentes y no una modificación para mejorar la otra propuesta. Con otros términos, lo que estamos observando es que parece que estos alumnos se resisten a modificar sus concepciones matemáticas y didácticas iniciales y como consecuencia de la influencia del programa simplemente adicionan algunas actividades que, de acuerdo con sus concepciones, les parecen interesantes para apoyar y reforzar sus planteamientos originales. Este tipo de modificación las consideramos no efectivas.

En esta supuesta modificación y mejora, intentan integrar diferentes sistemas de representación, pero lo hacen de una manera artificial y típicamente "academicista". A partir de un conjunto de parejas ordenadas de números, obtienen los puntos correspondientes. Una vez identificada la gráfica, el mismo profesor introduce el concepto de función cuadrática como una expresión algebraica cuya gráfica viene a ser del mismo tipo que se ha obtenido mediante la representación gráfica del conjunto de puntos. Posteriormente, proponen introducir los otros conceptos asociados como los de ecuación y trinomio de segundo grado, así como las propiedades algebraicas y gráficas de estos conceptos siguiendo el estilo discursivo (de transmisión de conocimientos) tradicional. La modificación entre la propuesta inicial y la nueva propuesta no la consideramos una mejora por estar desarticuladas la una de la otra. Sin embargo, somos conscientes que la modificación y mejora de las propuestas por parte de estos alumnos, a pesar de las influencias del programa en relación con el intento de incorporar el tratamiento de múltiples representaciones (como sistemas o no) y de las CG, está fuertemente condicionada por sus sistemas de ideas formales y rígidas acerca de los objetos matemáticos en cuestión. Como ya lo hemos dicho, estos alumnos suelen confundir la representación (algebraica) con lo representado (el objeto matemático):

Se llama <u>función cuadrática</u> a la expresión dada por $y=ax^2+bx+c$.

Este no es un problema fácil para el profesor en formación, entre otras razones porque, en el caso de las representaciones simbólica y gráfica, el mismo medio, o sea las representaciones, también constituyen objetos de estudio. Pero no es el único ni principal objeto de estudio, es un objeto de estudio importante y necesario para acceder al objetivo principal que es la compresión del significado del concepto en cuestión.

Por otra parte, en relación con la incorporación y utilización de la CG en los procesos de enseñanza-aprendizaje, a pesar de que en el curso-taller insistimos explícitamente a los alumnos que procuraran integrar esta tecnología en sus nuevas propuestas didácticas, tal y como lo hemos explicado anteriormente, el papel que le asignaron resultó ser inadecuado y muy limitado. Por ejemplo, para Antonio las tecnologías se deben introducir después que los estudiantes ya hayan comprendido las relaciones múltiples que pueden haber entre las representaciones simbólicas (algebraicas), gráficas y numéricas (tablas de valores).

Esto es contrario a lo que estuvimos proponiendo durante el desarrollo del curso-taller. Basándonos en principios constructivistas, intentamos defender la idea de que las CG pueden ser utilizadas justamente para construir significativa y comprensivamente estas interrelaciones entre los diferentes sistemas de representación y, por ende, de la estructura conceptual que representan. Además, defendimos que las tecnologías podían ser incorporadas desde el mismo comienzo de la planificación curricular para la introducción, motivación y desarrollo de los tópicos y temas, y se debían mantener integradas como algo natural o normal en el aula y en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos.

Creemos que las propuestas de estos futuros profesores basada en el papel limitado que le asignan a las CG y su utilización sólo en momentos especiales, tiene mucho que ver con su concepción formalista, academicista y tradicional de las matemáticas escolares. Para estos alumnos, utilizar la tecnología de esta manera, como mero instrumento de cálculo, comprobación y refuerzo, no dificulta el normal desarrollo de sus propuestas basadas en dichos sistemas de ideas o concepciones, como, en efecto, lo hacen. Veamos lo que dice uno de estos alumnos sobre las posibilidades de utilizar la calculadora:

> *Inicialmente no se podrá utilizar la calculadora. Posteriormente y como actividad de refuerzo la utilizaremos, pues el objetivo final es que sepan la relación existente entre la gráfica, su expresión y su tabla de valores* (Antonio, Tarea final: Introducción, motivación y desarrollo del tema)

En conclusión, a pesar de que en el curso-taller insistimos explícitamente y desarrollamos propuestas de actividades concretas acerca de que una de las principales utilidades de las CG es que permitían interrelacionar adecuadamente múltiples representaciones de un mismo objeto matemático (estructura, concepto, procedimiento o problema), en la práctica estos alumnos no consideraron ninguna de estas opciones ni utilizaron las propuestas concretas que les presentamos. Sostenemos que es muy difícil articular estas nuevas propuestas con el tipo de ideas o concepciones y experiencias que estos estudiantes tienen sobre la matemática y su enseñanza, es decir, con el tipo de CD que tienen y que el programa no alcanzó a modificar sustancialmente.

Las respectivas propuestas de evaluación confirman las anteriores afirmaciones y ponen de manifiesto otra característica común entre estos alumnos. Todos manifestaron, tanto en sus propuestas de evaluación como en las opiniones formuladas en los debates y encuesta de evaluación en que no permitirían ni creen que se debiera permitir el uso de calculadoras en las pruebas y actividades de evaluación. Los ejercicios que propusieron para la evaluación del tema fueron típicamente clásicos y formalistas, centrados básicamente en lo algebraico (véanse las propuestas de evaluación inicial y final de Antonio en la sección 6.7.3). Por ejemplo, Irene propone como prueba de evaluación, tanto en la tarea inicial como en la final (sin introducir ninguna modificación), los siguientes ejercicios:

> *1º. Representar gráficamente la función $y=2x^2+4x-2$. ¿Qué ocurre si cambiamos el coeficiente de x^2 por otro? ¿Sabrías explicar qué ocurre si le damos otros valores distintos?*
> *2º. Un molino de aceite trabaja continuamente produciendo 50 litros de aceite cada media hora. Si observamos la producción a lo largo de un día, estamos relacionando las variables tiempo en horas y producción de aceite en litros. La variable independiente será:.....; y la variable dependiente será:..* (Irene, Tareas inicial y final: Pruebas de evaluación).

La otra alumna de esta tipología (Mª. Jesús) también propone la misma prueba de evaluación en sus tareas inicial y final:

> ***1º. a)*** *Calcular el vértice de la parábola dada por $y=-x^2+6x-5$.*
> ***b)*** *Represéntala gráficamente e indica su eje de simetría.*
> ***2º.*** *Di cuál es el simétrico del punto X=1 respecto al eje de simetría de la parábola anterior.*
> ***3º.*** *Di si las ecuaciones siguientes tienen soluciones reales o no. En caso afirmativo calcúlalas:* ***a)*** $x^2-5x+6=0$; ***b)*** $x^2-2x+5=0$; *y*
> ***c)*** $9x^2+6x+1=0$.
> ***4º. a)*** *Resuelve la siguiente ecuación* $(x-3)(x-4)=0$.

> *b) Efectúa el producto (x-3)(x-4). Comprueba que has obtenido la expresión x^2-7x+12. Iguala esta expresión a cero y resuelve la ecuación x^2-7x+12=0.*
> *c) Observa los coeficientes de la ecuación anterior y las soluciones obtenidas. ¿Encuentras alguna relación entre ellas?* (Mª. Jesús, Tarea inicial: Prueba de evaluación).

En su multitarea final, esta alumna propone la misma prueba de evaluación inicial y agrega lo siguiente:

> *La prueba de evaluación final coincide con la de la tarea inicial, sin incluir la calculadora gráfica. La calculadora la veo bien como instrumento de apoyo para un mejor entendimiento inicial de los conceptos. Pero, una vez que estos han sido adquiridos, el alumno debe estar ya suficientemente capacitado para realizar un examen sin necesidad de utilizar la calculadora* (Mª. Jesús, Tarea final. Prueba de evaluación).

Como podemos comprobar, estos alumnos mantienen inmodificables sus propuestas de evaluación. Y, consecuentes con su resistencia a la utilización efectiva de la calculadora como instrumento organizador de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, niegan la posibilidad de que se utilice en las actividades de evaluación. Consideran que la evaluación es justamente una oportunidad que tienen los estudiantes para demostrar "efectivamente" que han logrado aprender lo que se les ha intentado enseñar. Esta consideración está relacionada con sus concepciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático escolar y sobre la manera de enseñarlo y aprenderlo. Ideas que, en síntesis, están fuertemente relacionadas con la utilización casi exclusiva de las tecnologías y métodos tradicionales basados en el uso del papel y el lápiz. Como podemos observar, curiosamente varios de los ejercicios de las distintas pruebas de evaluación que proponen estos alumnos se pueden resolver fácil y rápidamente utilizando una CG, sin embargo ellos son reacios a que esta tecnología sea utilizada para resolverlos. ¿Por que? Sin duda, esto tiene que ver con sus ideas acerca de lo que para ellos significa haber aprendido, "adquirido" o saber matemáticas. Como dice Mª. Jesús en el protocolo citado anteriormente, "*una vez que estos conceptos han sido adquiridos, el alumno debe estar ya suficientemente capacitado para realizar un examen sin necesidad de utilizar la calculadora*". O como seguramente lo creen Antonio e Irene, que la manera de demostrar que un concepto o procedimiento matemático se ha "adquirido" o aprendido realmente, consiste en poderlo hacer "*por sí mismos con el papel y el lápiz*".

En síntesis y a modo de conclusión parcial sobre esta tipología de profesores en formación, entendemos que bajo sus propios puntos de vista, basados en ideas que hemos etiquetado como formalistas, academicistas y tradicional, basadas en las propias experiencias tanto sobre el conocimiento matemático como sobre su enseñanza-aprendizaje, les resulta muy difícil llegar a considerar e integrar las perspectivas e instrumentos teóricos, metodológicos y tecnológicos que hemos impulsado e impartido en el programa y en el curso-taller de formación.

Con respecto a esta tipología de profesores en formación, la aceptación efectiva y provechosa de las nuevas tecnología de representación múltiple y cálculo simbólico, está en relación estrecha con dos cuestiones principales: Una que tiene que ver con el sistema de ideas (concepciones, creencias, actitudes, información, experiencias y conocimientos) que se tengan sobre el CM, sobre su naturaleza y sobre sus procesos de enseñanza-aprendizaje. Y otra, se refiere al sistema de ideas que se tengan y se desarrollen hacia las tecnologías en uso, sobre su incorporación y utilización en el currículo y en el aula de matemáticas. Con pocas palabras y desde nuestro punto de vista, esto tiene que ver con el conocimiento didáctico y la formación didáctica que los profesores en formación tengan en relación con el modelo sistémico y local de los organizadores para el currículo de matemáticas.

En el caso que nos ocupa podríamos decir que los profesores en formación de la tipología **PF-III** no han podido acceder a estas propuestas curriculares, los organizadores y la metodología de análisis didáctico, en el relativamente reducido tiempo que duró el curso-taller. Porque, aunque hubieran tenido una mayor tendencia de actitudes positivas y una predisposición favorable creciente sobre la utilidad didáctica de la tecnología, esto no garantizaría el acceso efectivo a propuestas innovadoras y fundamentadas didácticamente (como lo observaremos en la tipología de profesores en formación PF-II). Porque al ir estas actitudes acompañadas de un sistema de ideas de carácter formalista, academicista y tradicional sobre el conocimiento matemático y su enseñanza, constituye un importante *handicap* para poder llegar a considerar efectiva y eficazmente las distintas posibilidades didácticas que aportan tanto la consideración de la pluralidad y singularidad de los sistemas de representación, como las múltiples utilidades curriculares y potencialmente innovadoras de las modernas tecnologías de representación como son las CG.

6.3. TIPOLOGÍA DE PROFESORES EN FORMACIÓN CON PREDISPOSICIÓN FAVORABLE Y POCA EFECTIVIDAD INNOVADORA

La tipología **PF-II** de futuros profesores de matemáticas junto con la tipología **PF-I** que caracterizaremos en el siguiente apartado tienen en común mantener durante las distintas fases del curso-taller una predisposición actitudinal favorable hacia la integración en el currículo, utilización de la CG en el aula de matemáticas y un potencial innovador en relación con esta tecnología. Los alumnos para profesor que integran esta segunda tipología son **Juan**, **Olga** y **Patricia**. Estos tres alumnos fueron seleccionados a partir de los conglomerados producidos mediante los análisis *cluster* y confirmados mediante el análisis de *escalamiento multidimensional*, teniendo en cuenta revisiones complementarias de las demás producciones e intervenciones de los participantes del programa.

La principal diferencia entre los alumnos de la tipología PF-II y los de la PF-I es que los alumnos de la tipología PF-II, a pesar de tener, en promedio, las más altas asignaciones numéricas en sus escalas de actitudes (véase Tabla 6.2), no logran incorporar efectivamente las tecnologías en sus propuestas didácticas y no acceden eficazmente a las propuestas innovadoras que se les presentaron durante el desarrollo del curso-taller. Dicho con otras palabras, estos alumnos intentan integrar las tecnologías en sus propuestas didácticas pero lo hacen de una forma mecánica, poco crítica y subordinada. La idea de no efectividad se refiere al hecho que, a pesar de la actitud y opiniones favorables y el potencial innovador hacia la tecnología, esto no se ve reflejado efectiva o apropiadamente en la práctica, en sus propuestas didácticas. De todas maneras, al contrario de lo ocurrido con los alumnos de la tipología PF-III, estos alumnos sí reafirmaron sus tendencias actitudinales expresadas mediante las asignaciones numéricas de la escala de actitudes y mediante sus intervenciones y opiniones en las distintas secciones de debate y de evaluación del curso-taller. Es decir, estos alumnos experimentaron algún cambio apreciable en relación con los distintos contenidos o cuestiones de que nos ocupamos en este estudio, como vamos a mostrarlo en las secciones siguientes. Pero, a diferencia de los alumnos de la tipología PF-III, que por sus actitudes desfavorables y conservadoras hacia la integración de las calculadoras en el currículo y en el aula y por sus concepciones formalista y tradicionalista sobre el CM y su enseñanza utilizaban la nueva información suministrada en cada sesión del curso-taller para reforzar y defender sus propias posturas, los alumnos de la tipología PF-II hacen justamente lo contrario. Es como si confiaran ciegamente en las nuevas propuestas, en todo lo que dice el profesor y hasta en lo que no dice y suponen que es favorable por tratarse de las nuevas tecnologías por las que creen que los profesores del curso propugnan.

6.3.1. Características del grupo PF-II en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación

Los futuros profesores de esta tipología, conciben el conocimiento matemático y su enseñanza de la misma manera que los de la tipología PF-III. Además, tampoco dan grandes muestras de flexibilización y modificación efectiva de estas posturas al finalizar el curso-taller. Con estos estudiantes las distintas aportaciones del programa no resultaron suficientes para movilizar sus concepciones sobre el contenido matemático. Estas concepciones las hemos reconocido como importantes factores de resistencia al cambio en el conocimiento didáctico en relación con el diseño y planificación de actividades didácticas innovadoras basadas en la triada EC, SR, CG, estructurada sistémicamente en el modelo local de los organizadores. Consideramos que la formación matemática de origen en estos estudiantes y la incidencia en sus concepciones sobre el contenido matemático y sobre su enseñanza es un condicionante que hay que tener muy en cuenta a la hora de diseñar y planificar propuestas de formación didáctica de futuros profesores. Está claro que estas propuestas no tienen garantías iniciales de éxito si no se proponen formas de concebir el conocimiento matemático más acordes con perspectivas escolares constructivistas e innovadoras, como la actualidad educativa demanda. La integración significativa de las nuevas perspectivas didácticas y tecnológicas, implica no sólo un cambio efectivo de actitudes, sino también una cierta convicción, confianza o seguridad personal sobre las ventajas de la nueva alternativa, basada en pequeños y progresivos éxitos en el dominio de la tecnología y que además pueda ser justificada con argumentaciones y demostraciones didácticas. Dicha confianza y seguridad, requiere además de una predisposición actitudinal favorable, una base de conocimientos y experiencias sólidos y adecuados al respecto. Como sostiene Saenz (1997):

> Entre la seguridad que proporcionan los métodos conocidos y la ansiedad ante los nuevos, el futuro profesor opta por la seguridad, aunque desee, con la boca pequeña, la renovación. De ahí que la ruptura de la resistencia al cambio no se pueda apoyar en el dudoso atractivo de "lo nuevo", sino en una teoría de la enseñanza fundamentada en principios sólidamente establecidos (Saenz, 1997, p. 40).

De acuerdo con las explicaciones dadas anteriormente, consideramos que no es necesario volver a describir en detalle las características de este tipo de alumnos en relación con sus maneras de concebir la EC y los SR, pues lo hicimos en el apartado anterior, ya que comparten estos rasgos con los estudiantes de la tipología PF-III. Sin embargo, si presentaremos aquellos aspectos que puedan ser, por una parte, complementarios para esta caracterización y, por otra parte, específicos y diferenciales. Los alumnos de la tipología PF-II conciben el conocimiento matemático a los efectos de ser enseñado de manera formalista y academicista, como estructuras rígidas y estables, difícilmente modificables y adaptables a nuevas situaciones. Esta manera de concebir el conocimiento matemático es, por principio, contraria a una concepción basada en criterios socio-constructivistas. De todas maneras, por sus actitudes altamente favorables hacia la incorporación de las CG en el currículo y la enseñanza de las matemáticas acceden en la práctica a la utilización de estas tecnologías en las distintas propuestas didácticas que formulan; eso sí, sin realizar grandes modificaciones a sus esquemas y concepciones iniciales sobre el conocimiento matemático y manera de enseñarlo. Lo que hacen en este sentido es muy parecido a lo que hacen los alumnos de la tipología P-III: En las propuestas didácticas finales se limitan a añadir a las actividades iniciales otras actividades en las que sí se permiten o necesitan las CG. Con el fin de ilustrar las anteriores reflexiones, observemos, por ejemplo, la definición inicial de ecuación de segundo grado dada por Patricia (tipología P-II):

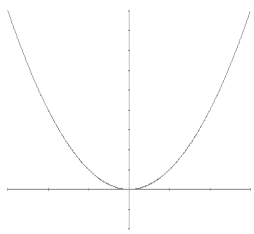
> *Las ecuaciones de segundo grado son aquellas que tienen términos en x^2 y no tienen ninguna potencia de x de grado superior a 2.* (Patricia, Multitarea inicial).

Esta alumna considera que una de las principales causas de dificultad de los conceptos son la comprensión del significado de las expresiones simbólico- algebraicas correspondientes. Recordemos que para la mayoría de estos alumnos el concepto mismo coincide con este tipo de representación simbólica. Tal vez por esta razón presentan sus definiciones básicamente en lenguaje natural. Estos alumnos creen que la dificultad del concepto estriba en el uso de un lenguaje algebraico formal y por eso lo omiten en sus enunciados, sin darse cuenta que, de esta manera, no sólo sigue siendo algebraico aunque informalmente, sino que, a la postre, incluso puede resultar más incomprensible para los estudiantes de secundaria. Esta alumna dice lo siguiente al respecto: *Es que para motivar a los niños no se deben decir las cosas de maneras duras* (Patricia, E.VIII.02). Suponemos que aquí para ella el término "*duras*" se refiere a utilizar directamente expresiones simbólico-algebraicas.

Los alumnos de esta tipología no modifican sus propuestas didácticas iniciales sino que se limitan a ampliarlas agregándoles actividades y ejercicios basados en el uso de la CG, pero en secciones especiales, aparte de las demás secciones que siguen siendo tradicionales; o simplemente al final de una de estas secciones iniciales como anexos, pero, con el único propósito de comprobar aquellas tareas previamente resueltas a mano con papel-y-lápiz. Esto quiere decir que sus concepciones e ideas sobre la naturaleza del conocimiento matemático escolar en cuestión no las han revisado críticamente para intentar introducir alguna modificación de acuerdo con las ideas trabajadas en el curso-taller. Esta es una característica que comparten todos los alumnos para profesores que hemos analizado hasta ahora, tanto los de la tipología PF-III como lo de la PF-II. Esta alumna (Patricia), en la multitarea final mantiene la misma definición inicial, salvo que le agrega algunas propiedades algebraicas y gráficas para ilustrar las posibles interacciones entre los diferentes tipos de representaciones (algebraica, gráfica y numérica). La propuesta de esta alumna consiste en considerar y definir inicialmente como función cuadrática la función cuadrática básica cuya representación algebraica está dada por $y=x^2$, luego estudiar sus principales propiedades y, posteriormente, considerar y estudiar todas las demás funciones cuadráticas de la forma general $y=ax^2+bx+c$, considerándolas como transformaciones geométricas (compresiones, dilataciones, traslaciones horizontales y verticales) de la función básica. Esta alumna dice textualmente en su tarea final que la función cuadrática "*es una expresión de la forma* $y=ax^2+bx+c$ *que puede ser obtenida a partir de* $y=x^2$ *mediante transformaciones geométricas*". Luego agrega algunas de las principales propiedades de esta función cuadrática básica, tales como:

Función cuadrática: $y=x^2$

- *Tabla de valores:* (x, y) = (-1, 1), (0, 0), (1, 1)
- *Dominio*: $\Re$
- *Gráfica*:



- *Simetría*: *Eje* y: *Como* $a^2=(-a)^2$, *la curva es simétrica.*
- *Monotonía:* *Creciente:* x^2 *es tanto más grande cuanto más lejos esté* x *del cero. Por tanto la curva es creciente a partir de 0.*

Posteriormente, de la misma manera verbal y simbólico-algebraica, esta alumna continúa describiendo y generalizando, las diferencias y propiedades de "las funciones cuadráticas" utilizando varios ejemplos. Parece evidente que para esta alumna, como para todos los demás alumnos de las tipologías PF-II y PF-III, el concepto de función cuadrática coincide con su representación algebraica, y que las otras representaciones (numérica y gráfica) son tratadas solamente como meras características o propiedades de esta manera de concebir el concepto de función cuadrática. Esta concepción ("formalista"), la pone claramente de manifiesto al reducir la simetría de la parábola a la comprobación algebraica de la relación $x^2=(-x)^2$.

No obstante, el tratamiento de los diferentes SR ha sido, sin duda, la cuestión que más ha influido efectivamente sobre esta alumna y demás alumnos de esta tipología. Sin excepción, todos los alumnos han modificado de alguna manera, aunque no siempre en una dirección acertada, sus propuestas y producciones didácticas en lo que compete al tratamiento e interrelación de los diferentes SR. Esto no nos ha sorprendido, debido a que hemos sido conscientes del dominio del conocimiento experto que han demostrado poseer. Recordemos que son estudiantes del último curso de la Carrera de Matemáticas. Los diferentes sistemas de representación convencionales de las matemáticas forman parte de su dominio matemático, de tal manera que integrarlos con perspectivas didácticas o, al menos intentarlo, no les debería resultar nada complicado, sin ni siquiera tener que modificar sus esquemas cognitivos (actitudes, creencias, concepciones) sobre el contenido matemático.

De hecho, tanto esta alumna como sus compañeros de tipología, las únicas modificaciones que introducen en sus multitareas finales, se refieren a tratamientos de diferentes tipos de representación. Especialmente, representaciones gráficas y simbólico-algebraicas. Pero, a pesar de que propusimos con muchos ejemplos concretos las posibilidades de las CG, justamente para facilitar estos tipos de tratamientos e interrelaciones de múltiples SR, no acceden a considerar adecuadamente estas tecnologías, salvo en situaciones muy puntuales y aisladas (como veremos más adelante con detalle). Los diferentes tipos de tratamientos que proponen, giran en torno a las representaciones simbólico-algebraicas; en el caso concreto de Patricia, se centra más en el lenguaje natural algebraico que en el simbólico-algebraico propiamente dicho. Así, por ejemplo, propone estudiar las relaciones entre dos tipos distintos de expresiones algebraicas de la función cuadrática, del siguiente modo:

> *Dada la expresión en la forma* $y=ax^2+bx+c$*, hay que proceder a factorizarla en la forma* $y=a(x-h)^2+k$*, y hacer un estudio gráfico de las dos para ver sus relaciones...* (Patricia, Tarea final).

La orientación que en este sentido planteamos en el curso-taller, fue justamente la contraria. Se propuso partir de situaciones intuitivas gráficas, luego, utilizando la tecnología trabajábamos múltiples casos y familias de parábolas, para proceder posteriormente a intentar establecer las conexiones entre las gráficas parabólicas de funciones y la correspondiente expresión canónica del vértice ($y=a(x-h)^2+k$). Finalmente, trabajábamos sobre las relaciones simultáneas entre los diferentes tipos de gráficas y de expresiones algebraicas. Como vemos, a pesar de este tratamiento esta alumna, lo mismo que sus compañeros, se mantienen anclados en el enfoque academicista tradicional que parte de la expresión algebraica estándar ($y=ax^2+bx+c$) o básica ($y=x^2$), para luego trabajar sobre todo lo demás de forma gráfica, numérica y verbal.

Otra alumna (Olga), integrante del grupo que estamos analizando, presenta algunas características diferentes respecto a sus compañeros. Ella es la más reflexiva y crítica frente a las nuevas propuestas que les hemos formulado a lo largo del curso-taller. Quizás por eso, en comparación con sus compañeros de tipología, no obtuvo una puntuación tan alta en la escala de actitudes. Además, fue la alumna con mayor número de respuesta neutrales (N). Esta alumna, a pesar de que la hemos caracterizado como "de predisposición favorable, pero no efectiva" hacia la utilización de las CG en la enseñanza, es una de las más efectivas y permeables de entre todos los alumnos para profesores analizados hasta ahora. Esto se pone de manifiesto, por ejemplo, en que tiene uno de los mayores porcentajes de modificaciones que se observan en sus distintas producciones a lo largo del programa. Esta alumna, en el análisis de sus diagramas conceptuales (Sección 5.3.1) tuvo un mayor porcentaje de modificaciones positivas (enriquecimiento) con respecto al índice de complejidad o elaboración (IE), tal como podemos comprobarlo cuantitativamente en la Tabla 7.4[2].

[2] En esta tabla no presentamos las puntuaciones de los otros dos alumnos de este grupo tipológico (Juan y Patricia) porque estos no entregaron sus respectivos diagramas conceptuales en ninguna de sus multitareas.

Tabla 6.4.
Relación inicial/final del índice de elaboración (IE) de los diagramas conceptuales de Olga (PF-II), la tipología P-III y el grupo-clase.

ALUMNOS	IE INICIAL	IE FINAL
Olga (PF-II)	2.0	2.3 (15%)
Tipología PF-III	2.5	2.6 (4%)
Grupo-clase	2.1	2.4 (14%)

Observamos que el enriquecimiento relativo de los esquemas conceptuales de Olga respecto al contenido matemático, reflejados a través del incremento del índice de elaboración (IE), fue del 15%, ligeramente superior al del grupo-clase que fue del 14% y muy por encima del grupo PF-III que fue del 4%. En sus diagramas conceptuales (véase Anexo 4) también se puede visualizar esta modificación sistemática de la complejidad. A pesar de las modificaciones positivas de la complejidad estructural de sus diagramas conceptuales, las propuestas del curso-taller no tuvieron toda la eficacia esperada. Tanto para esta alumna como para sus demás compañeros de tipología, el concepto de función cuadrática siguió siendo el mismo academicista-formalista y expresado básicamente en lenguaje verbal-algebraico:

> *Una función cuadrática es aquella que se expresa como un polinomio, en la variable independiente de grado dos, y cuya gráfica tiene la forma de una parábola.* (Olga, Multitarea final).

La definición inicial sobre la función cuadrática de Olga fue simplemente "*La función cuadrática es una expresión de la forma* $y=ax^2+bx+c$". El análisis de estas definiciones, de los diagramas conceptuales y demás producciones, tanto de esta alumna como de sus demás compañeros de tipología, ponen de manifiesto que, de todas formas, han mostrado cierta flexibilidad y permeabilidad frente a algunas de las ideas propuestas en el programa. Especialmente las relacionadas con la pluralidad e interrelación de los diferentes sistemas de representación. Pero, estos alumnos, sin llegar a modificar sus esquemas formales de concebir el conocimiento matemático, consideran las representaciones gráficas y numéricas como recursos subsidiarios de las representaciones simbólico-algebraicas y no como sistemas y lenguajes autónomos con capacidad propia para procesar y comunicar los conceptos y procedimientos puestos en juego; es decir, como alternativas complementarias que podrían enriquecer la construcción y comprensión significativa de este conocimiento matemático. Dicho de una manera más concreta, estos alumnos son capaces de proponer actividades complementarias para trabajar la comprensión de las relaciones entre expresiones algebraicas de las formas estándar ($y=ax^2+bx+c$) y sus correspondientes expresiones (también algebraicas) de la forma canónica del vértice ($y=a(x-h)^2+k$); no dudan en utilizar una gran variedad de ejemplos con el apoyo de gráficas, pero dan por supuesto que la relación entre cada expresión algebraica y su respectivas representaciones gráficas viniese dada de forma automática y explícita. Parece que lo que interesa a estos alumnos es que sus hipotéticos estudiantes de secundaria establezcan y comprendan la relación entre un tipo de representación algebraica (estándar) y la otra (canónica), pero no ofrecen alternativas didácticas en las que las representaciones tengan un tratamiento autónomo. Más bien, proponen utilizar las respectivas ilustraciones gráficas, con la ayuda de las nuevas tecnologías de representación (CG), como un simple recurso tecnológico, que sólo les sirve en este caso para ahorrar tiempo, ejemplificar y poder obtener de forma automática todas las gráficas de las funciones consideradas en sus formas algebraicas dadas. Por ejemplo, una de las actividades para la "*presentación, motivación y desarrollo del tema*" que propone Olga en su multitarea final, consiste en lo siguiente:

> *Experimentar con las gráficas de* $y=ax^2+bx+c$ *y su correspondiente expresión de la forma* $y=a(x-h)^2+k$ (canónica del vértice, paréntesis nuestro), *para cuando varía alguno de sus coeficiente*:
>
> *a)* $y_1=x^2+2x+\{-3, -1, 1, 3\}$ *b)* $y_2=x^2+\{-3, -1, 1, 3\}x+2$
>
> *c)* $\{-3, -1, 1, 3\}x^2+x+1$ *d)* $\{1/2, ¼, 1/8, 1/16, 1/32\}x^2+x+1$.

De todas formas, hay que reconocer que estos alumnos, como en el caso que hemos ejemplificado, han empezado a modificar de un modo significativo sus ideas y por consiguiente sus propuestas curriculares. El problema es que lo hacen de una manera poco crítica y escasamente autónoma y objetiva; es decir, lo hacen, agregando algunas actividades que les parecen interesantes similares a algunas de las que propusimos en las diferentes sesiones del curso-taller, pero sin mediar ningún tipo de reflexión critica, sino que adaptan estas propuestas a las suyas miméticamente, sin preocuparse por modificar sus modos tradicionales de concebir y tratar el conocimiento matemático. Un último ejemplo lo encontramos en el objetivo que plantea Olga para la actividad anterior, en la que el estudiante debe identificar las relaciones entre varios ejemplos de "*funciones cuadráticas*" expresadas algebraicamente en sus formas estándar y canónica del vértice. En realidad, lo que esta alumna se ha limitado a hacer es una adaptación de algunas de las actividades que les propusimos en el curso-taller, pero, con objetivos o propósitos diferentes. En el caso concreto al que nos estamos refiriendo se trataba de un conjunto de actividades que denominamos como "*El a, b, c de las funciones cuadráticas*" (Actividad A.3, Sección 2.4.2) y cuyo objetivo era que el estudiante (de Enseñanza Secundaria) comprendiera significativamente la relación entre los parámetros de la expresión estándar y su correspondiente representación gráfica, a través de la visualización de los efectos sobre las variaciones de las gráficas y tablas numéricas de las correspondientes variaciones de estos parámetros. Se trataba de establecer y estudiar las interrelaciones entre las distintas representaciones gráfica, numérica y algebraica con el apoyo de las NTR, y no, a la manera formal tradicional, entre un tipo de representación algebraica y otra, que es como lo propone nuestra alumna.

6.3.2. Caracterización del grupo PF-II en relación con el conocimiento y actitudes hacia las calculadoras graficadoras

Recordemos que los futuros profesores de esta tipología se encuentran agrupados en el primer cuadrante del análisis gráfico de *escalamiento multidimensional* y de acuerdo con esto se caracterizan por tener un potencial innovador y una actitud favorable hacia la incorporación de las CG en el currículo de matemáticas de Enseñanza Secundaria. Estos alumnos comparten esta característica con los de la tipología **PF-I** que analizaremos en el siguiente apartado, pero a diferencia de estos no consiguen concretar efectivamente en la práctica sus tendencias actitudinales favorables e innovadoras a pesar, incluso, de mostrar un gran interés por introducir en sus propuestas curriculares algunas modificaciones y actividades basadas en las aportaciones que se han hecho en el curso-taller, especialmente en relación con los diferentes SR y los recursos tecnológicos considerados como organizadores del currículo. Consideramos que la falta de efectividad se debe a la conjunción de, por una parte, su manera de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza (formalista, tradicional y difícilmente modificable) y, por otra parte, a sus actitudes condescendientes, subordinadas y carentes de la reflexividad crítica necesaria frente a nuevas propuestas curriculares. Más adelante intentaremos documentar y justificar esta suposición.

Los alumnos de este grupo obtuvieron las puntuaciones comparativamente más altas en la escala de actitudes con respecto a las demás tipologías de profesores en formación. Es decir que, de acuerdo con esta escala, en conjunto demostraron tener la mayor predisposición favorable y potencial innovador hacia la incorporación de la tecnología en el currículo. En la Tabla 6.5 mostramos los resultados de estos alumnos y sus respectivos promedios en la escala inicial y final, así como las respectivas variaciones (inicial/final) de actitudes.

Tabla 6.5.
Resultados iniciales, finales y variación de la escala de actitudes correspondientes a los alumnos de la tipología P-II.

ALUMNO	INICIAL	FINAL	VARIACIÓN
Juan	4.2	4.5	7%
Olga	3.5	3.6	3%
Patricia	3.8	4.1	8%
Roberto	4.2	4.3	2%
Promedios PF-II	**3.9**	**4.1**	**5%**
Promedios PF-III	**3.3**	**3.4**	**3%**
Promedios grupo-clase	**3.7**	**3.9**	**5%**

Como se puede observar, las puntuaciones promedios del grupo de alumnos de esta tipología y el incremento están por encima tanto del grupo-clase como de los de la tipología P-III. Sin embargo, a pesar de esta mayor puntuación en la predisposición y potencial innovador sobre la tecnología, así como de su manifiesta disposición, interés e incluso primeras intenciones por introducir las propuestas didácticas que con tanto énfasis se trabajaron en el curso-taller, nos preguntamos por qué estos alumnos no lograron incorporar eficazmente estas propuestas de integración de las CG en el currículo. Creemos que las principales causas de esta dificultad o limitación están muy relacionadas con, por una parte, la manera de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza, la tendencia actitudinal aquiescente y poco reflexiva por parte de estos futuros profesores.

Basándonos en los análisis comparativos entre los distintos grupos tipológicos y la experiencia de los estudios pilotos, consideramos que una manera de enfrentar e intentar modificar estas tendencias actitudinales, dificultades y limitaciones, consistiría en mejorar los conocimientos didácticos (CD) teórico-prácticos que capaciten para realizar la reflexión crítica necesaria para un análisis didáctico (AD) efectivo. Desde nuestro punto de vista, esta formación didáctica está centrada o basada en los diversos elementos conceptuales y metodológicos estructurados en modelos locales y particulares de los organizadores para el currículo de matemáticas. Los alumnos de la tipología PF-II, durante el desarrollo del curso-taller, no lograron adquirir una apropiada comprensión y un adecuado dominio de competencias objetivas y autónomas para establecer interrelaciones sólidas entre los múltiples SR y las NTR, considerados como elementos organizadores para el currículo de matemáticas.

Pero también debemos reconocer que, probablemente, los alumnos de esta tipología, a pesar de su interés, actitudes favorables y primeras intenciones hacia las tecnologías y propuestas del curso-taller, no lograron acceder efectivamente a las propuestas que les hicimos porque tal vez la duración del curso-taller no fue suficiente. De hecho, todos ellos manifestaron en la encuesta de evaluación final que la duración del curso-taller no les pareció suficiente. De algún modo, estas dificultades unidas a sus concepciones sobre la matemática y su enseñanza, han funcionado como un obstáculo que contribuyó a intrincar la buena predisposición y las intenciones favorables que siempre manifestaron tener. Como dice Patricia en sus conclusiones finales:

> *Creo que todos los que hemos asistido a este curso es porque estamos muy interesados en el tema. Eso está claro.* (Patricia, Encuesta de evaluación final).

Por nuestra parte como investigadores y evaluadores, también consideramos que como unidad de formación el curso se realizó con un ritmo demasiado intenso y con frecuencia tuvimos que desplazar temas de una sesión para la siguiente, tal y como lo explicamos en el Capítulo IV sobre la evaluación de la implementación del programa. De todas maneras, aclaramos que el propósito principal del curso-taller era la implementación del programa a evaluar como estrategia metodológica de investigación.

En síntesis, consideramos que para que una predisposición favorable hacia la utilización de las tecnologías (CG) en el currículo de matemáticas resulte efectiva, es decir que se lleve a la práctica con cierta eficacia, es necesario tener una cierta capacidad (flexibilidad y permeabilidad) para modificar autónomamente y de manera integrada el sistema de ideas sobre la EC y los SR, sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje y el papel de las tecnologías a tales efectos. Esta suposición mantiene vigente la condición también necesaria y complementaria de una formación didáctica adecuada, básica y sólida. Para superar las resistencias que generan en los profesores una propuesta innovadora esto no se debe intentar a través de motivaciones "dudosas" hacia 'lo nuevo', sino a través de una teoría didáctica fundamentada sólidamente. Los profesores en formación de la tipología PF-II, a pesar de su gran motivación, predisposición actitudinal favorable e incluso voluntad y disposición para introducir modificaciones innovadoras, no lo consiguen eficazmente por las deficiencias en su formación didáctica que hemos señalado. Como hemos dicho, muy a pesar de opiniones como la siguiente, dada por Juan en la entrevista de evaluación final del curso-taller:

> *Pienso que en general el uso de las nuevas tecnologías en el aula es un gran avance. Además, con respecto a las desventajas mencionadas anteriormente, pienso que todas son de un modo más o menos fácilmente solucionables. Creo que con un poco de voluntad y cuando todo el mundo esté realmente concienciado de la gran utilidad y paso adelante que supone integrar estas tecnologías a la educación, entonces realmente la humanidad habrá dado otro paso importante en su historia.* (Juan, Encuesta de evaluación final).

Este mismo alumno, que en la encuesta de evaluación final del curso-taller dio una valoración altísima (muy de acuerdo) en casi todos los ítems favorables a dicho curso, y que sólo estuvo en desacuerdo en un par de puntos sobre la duración de cada una de las dos partes o fases de ejecución (F-E.1 y F-E.2), a los cuales contestó que consideraba el tiempo insuficiente, puso de manifiesto en la mayoría de sus respuestas a dicha encuesta, que compartía (al menos verbalmente) los criterios y direcciones u orientaciones impartidas durante el desarrollo del Programa. Con sus propias palabras, consideró que "*son más las ventajas que las desventajas que suponen las calculadoras*" para la enseñanza y aprendizaje de las funciones en Secundaria, entre otras, por las siguientes razones:

- *Mayor visión de campo de los conceptos, que hasta ahora sólo se podían tratar de una manera unidireccional con respecto a los diversos sistemas de representación.*
- *Posibilidades dinámicas para simulaciones.*
- *Permiten la oportunidad del ensayo y error, pues es mucha la facilidad para hacer y deshacer, probar con nuevas operaciones, funciones, etc.*
- *Se pueden introducir muy fácil en el aula.*
- *Fomenta la comunicación entre alumno-alumno y entre alumno-profesor.*
- *Fomenta una educación más activa y constructiva* (Juan, Encuesta de evaluación final).

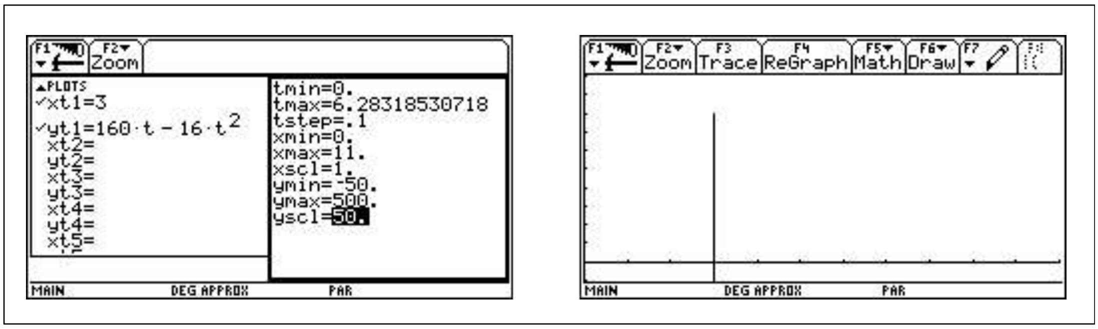
Todas estas razones fueron formuladas por los profesores del curso-taller como propuestas de probables criterios a considerar en relación con las posibilidades de las CG en el currículo y en el aula de matemáticas. Coherentemente con estos criterios, este mismo alumno considera que para poder hacer efectivas estas múltiples posibilidades de la tecnología, es necesario introducir algunas reformas o modificaciones importantes en el currículo y en el aula de matemáticas:

> *Pero, primero habría que modificar el tiempo y la clase orientándola hacia un proceso de aprendizaje en el que ya nos es el profesor el que descubre el conocimiento, sino que es el alumno el que va construyendo el suyo y luego mediante el error y la experimentación va retocándolo hasta obtener un conocimiento preciso y mejor. Así, la memorización iría en detrimento y el conocimiento y aprendizaje construido y elaborado significativamente en alza.* (Juan, Encuesta de evaluación final).

Del mismo estilo fueron las múltiples intervenciones de este alumno y sus compañeras de grupo en las diferentes intervenciones, debates y reflexiones conjuntas llevadas a cabo durante cada una de las sesiones del curso-taller. Sin embargo, esto no lo pusieron de manifiesto de manera concreta o efectiva en sus distintas producciones. No tenemos claro si esto corresponde simplemente con una etapa del proceso de formación didáctica de los futuros profesores en relación con la integración y utilización efectiva de las tecnologías en sus futuras actividades profesionales de enseñanza o, tal vez, corresponda sólo a la aquiescencia típica que suele presentarse entre algunos alumnos hacia sus profesores, cuando se trata de enfrentar nuevas propuestas y desarrollos innovadores.

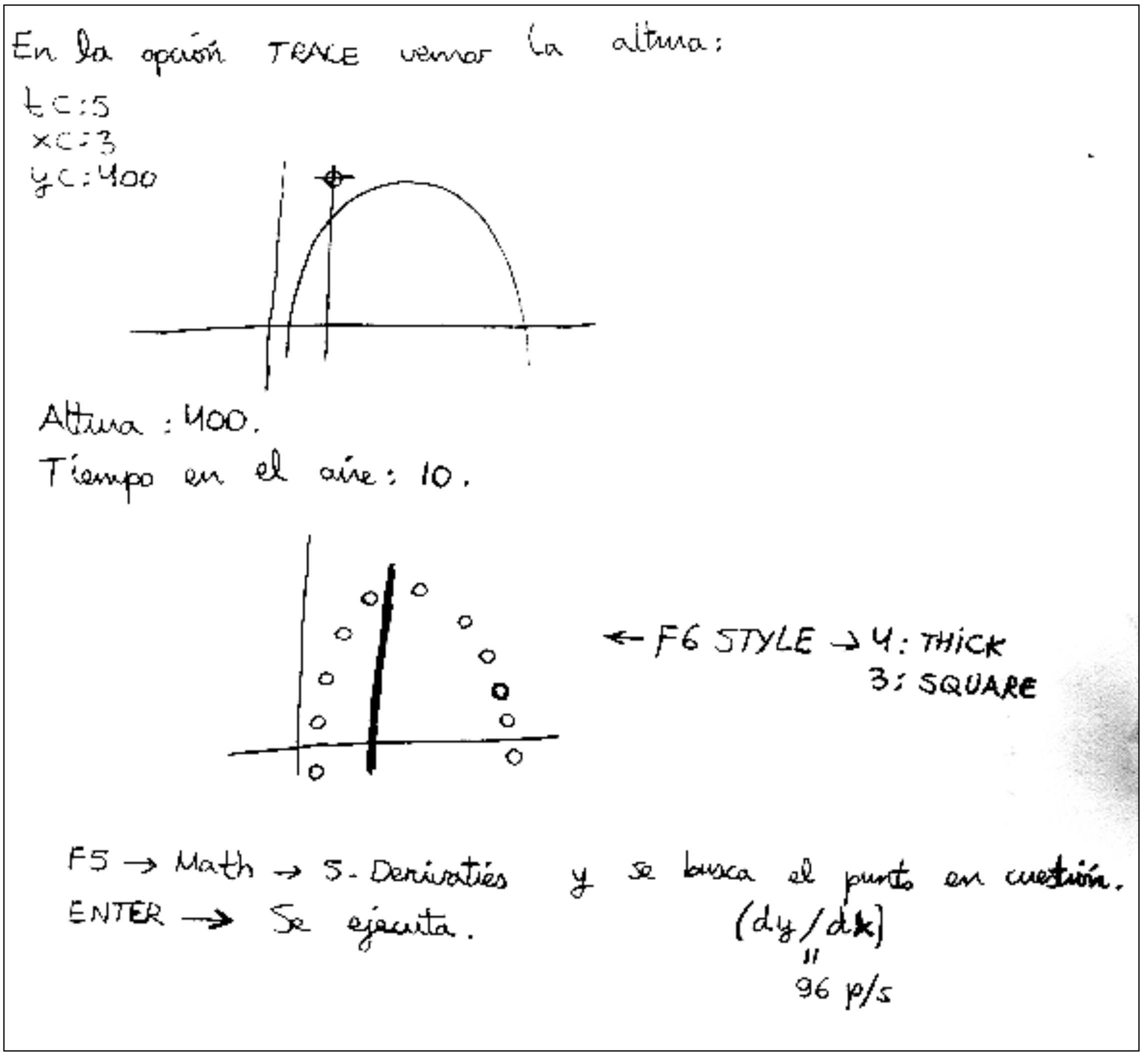
Tanto en sus cuadernos de trabajo, como en sus tareas intermedias (véanse Anexo 4), la mayoría de estos alumnos demostraron ser fieles y estrictos seguidores ("al pie de la letra") de las instrucciones del profesor y de los manuales de usuario de las tecnologías. No realizaban exploraciones espontáneas y autónomas como sí lo hicieron, por ejemplo, los alumnos de la tipología **PF-I**. Esto se puede comprobar al observar que en la mayoría de las actividades registradas en sus cuadernos de notas y en sus tareas intermedias, se limitaron a reproducir y trabajar exactamente con los mismos datos inicialmente suministrados por el profesor a manera de ejemplo, en el guión o en el manual de usuarios de la calculadora. Por ejemplo, las expresiones funcionales y los datos de las variables de configuración inicial y previa de la calculadora son exactamente las mismas que suministraban los profesores en la clase. Para ilustrar esto podemos considerar, por ejemplo, las expresiones de las ecuaciones y las "ventanas de visualización" correspondientes al problema A.VII.7 (Guión de la VII Sesión) sobre la "Simulación del movimiento de un proyectil". Este problema consistía en simular el movimiento de una roca lanzada verticalmente por una carga de dinamita desde el suelo hacia arriba. Las ecuaciones paramétricas correspondientes dadas por el profesor en la clase fueron las siguientes: $x_t=3$ e $y_t=160t-16t^2$. Los valores de las variables para la ventana de visualización, también dadas por el profesor a manera de ejemplo, fueron los siguientes: $t_{min}=0$, $t_{max}=2\pi$, $t_{step}=0.1$; $x_{min}=0$, $x_{max}=11$, $x_{scl}=1$; $y_{min}=-50$, $y_{max}=500$, $y_{scl}=50$. Con estos datos, la visualización en la pantalla de la calculadora (TI-92) corresponde a la Figura 6.5.

Figura 6.5.
Visualización mediante una TI-92 del problema del proyectil usando los datos iniciales



La actividad consistía explícitamente en hacer exploraciones, modificar la configuración y datos iniciales y modificar el problema con propósitos didácticos. Estos alumnos (igual que los de la tipología PF-III) se limitaron a presentar la tarea, justamente con los mismos datos de la clase. Ni siquiera corrigieron el "error" evidente correspondiente a los valores dados para t_{max} e y_{min}, que permitirían una mejor y más precisa visualización y simulación del movimiento del proyectil. Tampoco introdujeron variaciones de la función en coordenadas paramétricas que se había dado inicialmente en la clase. Esto se puede observar, por ejemplo, en la Figura 6.6 que contiene un facsímil de la tarea intermedia de Juan sobre este problema.

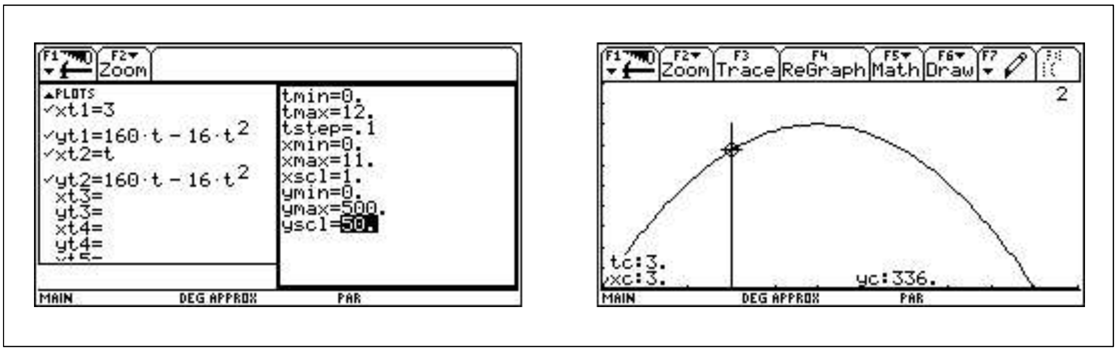
Figura 6.6.
Facsímil de la tarea intermedia de Juan sobre el problema del proyectil



Una variación sencilla como, por ejemplo, $x_t=t$ e $y_t=160t-16t^2$, hubiera permitido una visualización y simulación mucho mejor del movimiento y la trayectoria del proyectil, tal como se ilustra en la Figura 6.7.

En general, en la mayoría de situaciones y oportunidades como las descritas anteriormente, estos alumnos a duras penas se limitaron a copiar fielmente en sus cuadernos de notas lo que el profesor decía o escribía en la pizarra y en los guiones de las sesiones, sin realizar autónomamente exploraciones y variaciones sobre las mismas actividades, tal y como se insistió explícitamente en las clase.

Figura 6.7.
Una mejor visualización (y simulación) del problema del proyectil



Otra característica común que detectamos en estos alumnos, así como en los de la tipología PF-III, consiste en querer resolver todos los problemas propuestos en el curso-taller mediante los métodos algebraicos tradicionales o “canónicos” con papel y lápiz, incluso aquellos problemas que se indicaba explícitamente que resolvieran mediante técnicas de exploración gráfica utilizando la CG. Parece ser que este tipo de estudiantes tienen siempre la necesidad de apoyarse en la seguridad que les supone la solución canónica de los problemas, y que a la vez tienen una seria dificultad o reticencia a utilizar de manera sistemática (como un lenguaje técnico) el sistema de representación gráfico. Las gráficas se utilizan como un dibujo o como una propiedad (anecdótica) particular de la expresión algebraica que, como lo hemos dicho ya, estos alumnos suelen identificar como el concepto y no como una representación del mismo (véanse, por ejemplo, las definiciones de función y ecuación cuadrática dadas por estos alumnos).

Veamos, por ejemplo, el caso del siguiente problema sobre la obtención gráfica de las soluciones de una ecuación cuadrática en términos de las coordenadas del vértice (h, k) de la parábola asociada ($y=ax^2+bx+c$). Este problema se propuso en el curso-taller para trabajarlo gráficamente con el objetivo de inferir que las soluciones generales de una ecuación cuadrática pueden estar dadas mediante las siguientes expresiones: $x_1 = h - \sqrt{-k/a}$ y $x_2 = h + \sqrt{-k/a}$. La mayoría de los alumnos participantes en el curso-taller y en especial los de la tipología P-II (por ejemplo, véase el cuaderno de notas de Juan) lo resolvieron de la siguiente manera:

Sea $h=-b/2a$. Entonces, $ah^2+bh+c=a(b^2/4a^2)-b^2/2a+c= b^2/4a - b^2/2a + c = c - b^2/4a = (4ac - b^2)/(4a) = k$.

Entonces, tenemos que, $\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}}$.

Luego $\begin{cases} x_1 = h - \sqrt{\frac{-k}{a}} \\ x_2 = h + \sqrt{\frac{-k}{a}} \end{cases}$.

Estos alumnos, ante un interesante problema propuesto para trabajarlo gráficamente haciendo exploraciones con la calculadora graficadora mediante transformaciones geométricas adecuadas de diferentes parábolas, prefirieron llevarlo y reducirlo a un dominio donde se sienten más seguros: el dominio algebraico. Aunque se esté muy convencido, al menos a nivel del discurso, sobre las ventajas de introducir la CG en la enseñanza, ésta no será utilizada efectivamente para sacarle todo su partido, sino que quedará reducida a ser un instrumento novedoso, que suscita la atención de quienes tienen predisposición favorable hacia ella y que sólo puede ser utilizada como instrumento de cálculo, comprobación y en situaciones y momentos especiales de aplicaciones conceptuales, procedimentales o de motivación.

La no efectividad en relación con la incorporación de la tecnología en el currículo o en las propuestas de actividades didácticas por parte de estos alumnos y alumnas se puso de manifiesto, no sólo en la forma inadecuada y poco autónoma como la utilizan, proponen utilizarla sino también por las deficiencias e incluso ausencias efectivas de estas tecnologías en buena parte de sus propuestas didácticas. Esto, a pesar de tener las mayores puntuaciones en la escala de actitudes o manifestarse incondicionales en relación con las CG como recursos didácticos. Todo esto se puede apreciar en la siguiente trascripción de un fragmento del protocolo correspondiente a un episodio de debate y puesta en común realizado en una de las sesiones sobre el papel de las CG en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este episodio intervienen todos los alumnos de esta tipología:

EB (profesor): "¿A Uds. les parece que los razonamientos basados en procedimientos hechos con el SCS (sistema de cálculo simbólico) de la calculadora, por ejemplo, para obtener directamente la derivada, se pueden considerar como razonamientos algebraicos o analíticos? Y ¿Qué más podrían decir acerca de las diferentes posibilidades de la supercalculadora TI-92 para trabajar sobre este tipo de problemas, mediante la coordinación de diferentes sistemas de representación y la realización de visualizaciones y simulaciones de fenómenos y situaciones-problema, como esta (de la trayectoria del proyectil) que acabamos de trabajar? Por ejemplo, Roberto, ¿tú qué crees ahora? ¿Sigues pensando igual que antes?"

Roberto: "No, lo que yo estoy pensando ahora es que este ejercicio es un ejercicio más bien de Física, aunque se utilice en matemática para motivar el tema de las funciones... Entonces, las calculadoras en este caso sirven más bien para motivar, para introducir con este tipo de ejercicios el tema de las funciones, de las parábolas, para mostrar que hacen falta las matemáticas para resolver problemas como estos. Pero, cuando ya vamos a desarrollar el tema de las funciones, lo de la altura máxima, esto lo tenemos que estudiar desde otro punto de vista".

Juan: "Hombre, pero, si se usa la calculadora, yo creo que esto no quiere decir que ya no se tenga que saber qué es el concepto. Porque, por ejemplo, si tiene que usar la derivada, en el momento preciso que la necesita se ve si la calcula. La calculadora no te dice que tienes que calcular la derivada. Que no es que la calculadora te hace el problema o te da todo, sino que tú lo vas haciendo. Lo que pasa es que a la hora de hacer los cálculos, pues es más fácil. En este sentido, yo estoy en contra de lo que dice Roberto, que parece que si usas la calculadora te vas a poner un poco más tonto. No. Porque, tú eres el dueño de la calculadora y tú la vas manejando según como la necesites".

Roberto: (Riéndose) "Yo no he dicho eso".

Juan: "Bueno, pero lo digo en el sentido de lo que tú has dicho que sólo sirve para motivar, para ver que las cosas son más bonitas, que es más entretenido".

Patricia: "Yo lo que creo es que con la calculadora se le puede dar un sentido práctico a las matemáticas. Que puedes ver en la vida real las funciones que estás estudiando"

Juan: "Yo con lo que no estoy de acuerdo es con lo que has dicho (Roberto) en la segunda parte. Que si vas a enseñar la función, la parábola o la derivada, tienes que hacerlo como siempre se ha hecho, porque, la calculadora en eso no te ayuda. Que hay que dejarlas para el final, para ver a última hora que esto que les he enseñado es muy bonito"

Olga: "Yo creo que si a los niños se le pone una relación como $y=f(t)$, ellos no entienden qué es la *f*, la *y*, la *t*; ellos copian todo eso, copian cada fórmula, a lo mejor hacen la gráfica, pero no entienden nada. Ellos no entienden lo que es una función, qué quiere decir que una cosa está en función de otra. Yo creo que con estos tipos de problemas y con las calculadoras los niños no sólo entienden los aspectos físicos, sino que entienden la relación, qué quiere decir que algo está en función de otra cosa".

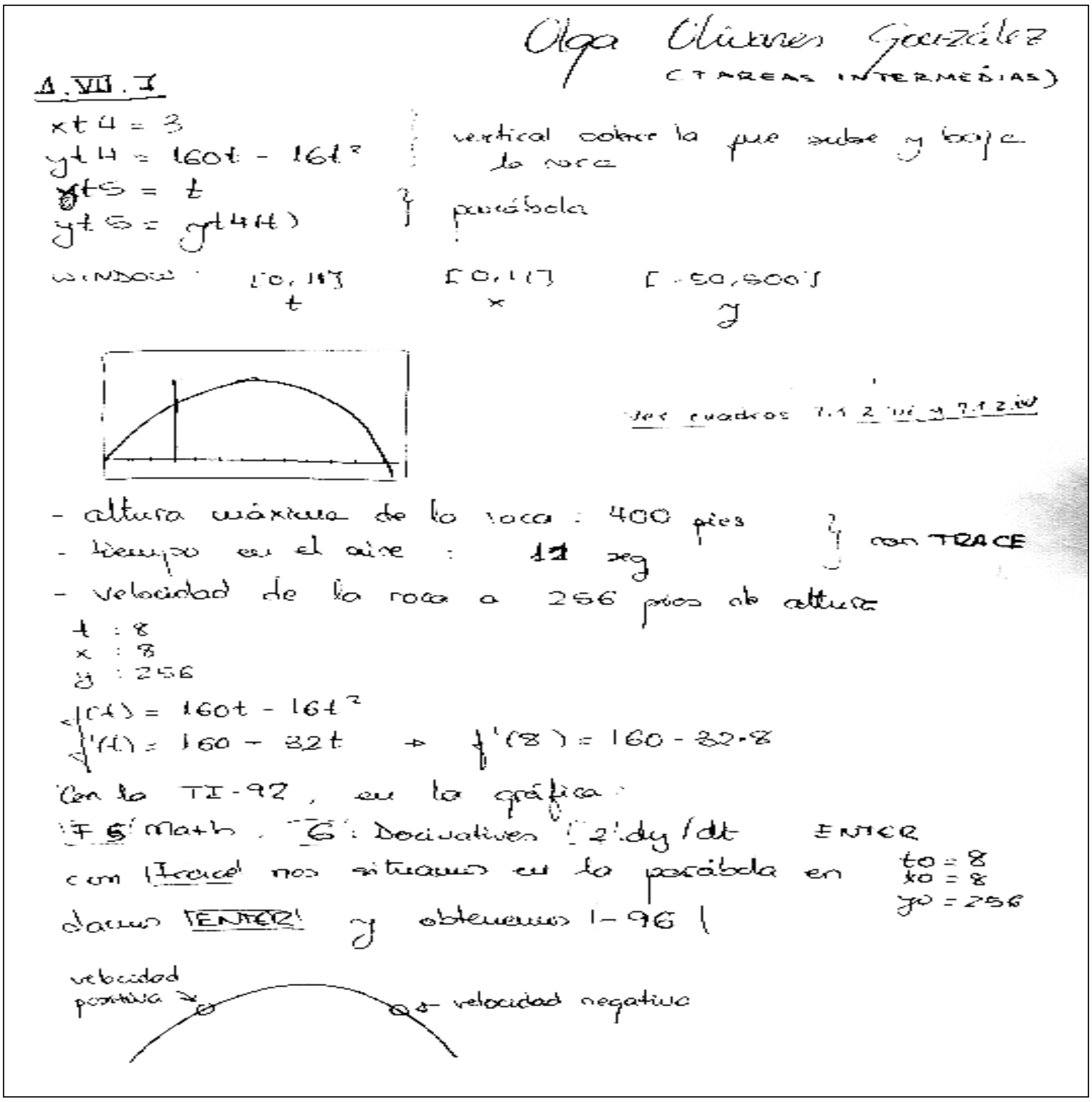
Juan: "Sí, con este problema se ve mejor lo que es una parábola. Porque, como se hace tradicionalmente en la pizarra, se ve como traza, como un simple trazo dibujado, se ve quieta, como algo inamovible que no permite ir más allá. En cambio, de esta manera, se puede ver incluso como un movimiento".

Creemos que los textos anteriores son suficientemente elocuentes y no necesitan más explicación. Las ideas de estos alumnos sobre el CM, su enseñanza, los SR y la utilización de las CG para apoyar la enseñanza y la comprensión de las matemáticas, aunque no experimentaron grandes modificaciones, sí empezaron a ser movilizadas positivamente a través de las prácticas, reflexiones e interacciones compartidas. Por ejemplo Olga, que unas veces se mostraba escéptica frente a las utilidades didácticas de las calculadoras, de hecho, fue la alumna con mayor número de respuesta neutrales (N) en la escala de actitud (12 en la fase inicial y 7 en la final). Lo cual indica que tuvo muchas dudas o reservas a la hora de contestar el cuestionario. Sin embargo, a pesar de obtener las puntuaciones más bajas en su grupo, en la práctica fue la integrante del grupo que resultó ser más efectiva, en el sentido de llevar sus ideas, predisposición actitudinal y opiniones favorables hacia las CG a la práctica, como lo podremos constatar más adelante cuando caractericemos los aspectos relacionados con el conocimiento didáctico (CD). Esta alumna, en la encuesta de evaluación final opinó lo siguiente:

El razonamiento y la comprensión de los resultados matemáticos es fundamental, y si hacemos un uso indebido de las calculadoras, éstas se pueden llegar a convertir en un fin y no en un medio para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, que es en realidad la meta que buscamos... Más que los objetivos, se debería cambiar el tiempo dedicado a la asignatura... pues estamos hablando de usuarios de secundaria, que apenas están aprendiendo su manejo, a la vez que aprenden matemáticas. Los objetivos deberían cambiar poco o nada. Seguimos queriendo que los estudiantes tengan una idea clara del *concepto de función, que sepan modelizar un problema de forma algebraica y gráfica, que sepan hallar sus soluciones, que reconozcan lo que es una función cuadrática, su vértice, etc. El uso de la calculadora no debe eludir las ideas matemáticas de estos conceptos, sino complementarlas y facilitar más su aprendizaje... De todas maneras, yo no veo las calculadoras como una panacea para las matemáticas. Pero, como educadores debemos ser conscientes de cuándo serán beneficiosas y cuándo harán confundir las ideas de los alumnos sobre la matemática. Yo creo que la principal utilidad de las calculadoras gráficas es que posibilitan trabajar la unión de los diferentes sistemas de representación y sobre todo con el gráfico, que es básico para la enseñanza y suele ser muy difícil de trabajar y ver en una pizarra.* (Olga, Encuesta de evaluación final).

Esta alumna, tal como lo insinuamos anteriormente y como lo podemos comprobar al revisar su producciones (especialmente su cuaderno de trabajo y las diferentes tareas que presentó), ha sido la integrante de su grupo que más dominio efectivo de la calculadora demostró. Sus producciones y comentarios, por ejemplo, en la tarea intermedia A.VII.7, ponen de manifiesto su predisposición actitudinal favorable hacia las calculadoras gráficas y el buen dominio de las mismas que alcanzó. No sólo resolvió con éxito el problema de acuerdo con las ideas que presentamos, sino que introdujo variaciones y ampliaciones a partir de exploraciones autónomas con la calculadora, como puede comprobarse en el siguiente facsímil de la tarea intermedia que presentó sobre el problema del proyectil descrito anteriormente (Figura 6.8).

Figura 6.8.
Facsímil de la tarea de Olga sobre el problema del proyectil



Olga Olivares González
(TAREAS INTERMEDIAS)

A.VII.I

$xt4 = 3$ vertical sobre la que sube y baja la roca
$yt4 = 160t - 16t^2$
$xt5 = t$ } parábola
$yt5 = yt4(t)$

WINDOW [0, 11] t [0, 11] x [-50, 600] y

- altura máxima de la roca : 400 pies } con TRACE
- tiempo en el aire : 11 seg
- velocidad de la roca a 256 pies de altura

t : 8
x : 8
y : 256

$f(t) = 160t - 16t^2$
$f'(t) = 160 - 32t \rightarrow f'(8) = 160 - 32 \cdot 8$

Con la TI-92, en la gráfica:
F5 Math, 6: Derivatives, 2: dy/dt ENTER
con Trace nos situamos en la parábola en to = 8, xo = 8, yo = 256
damos ENTER y obtenemos |-96|

Al finalizar la resolución de esta actividad, Olga presentó los siguientes comentarios en su cuaderno de tareas:

· *Problemas de este tipo sirven para motivar más al alumno. Aunque parece un problema de física, aquí se puede ver la matemática aplicada y en acción.*

· *Utilizando paramétricas y la calculadora gráfica podemos ver mejor el espacio recorrido en función del tiempo, la altura alcanzada* *en función del tiempo y de esta manera se puede comprender mejor el concepto de función cuadrática.*

- *La calculadora gráfica sirve para introducir el tema. Los propios alumnos pueden investigar con ella y descubrir propiedades de las funciones de forma muy intuitiva.*
- *Y da pie al trabajo en grupo y al intercambio de información constante entre alumno y alumno y entre alumno y profesor, y se pierde el distanciamiento habitual entre profesor y alumno.* (Olga, Tarea intermedia sobre la actividad A.VII.7)

Estas dos últimas intervenciones de esta alumna, ponen de manifiesto no sólo su actitud favorable y potencial innovador, sino también su mejor o mayor efectividad con respecto al dominio didáctico de la tecnología a la hora de resolver y proponer actividades didácticas. Estos hechos, al margen de su relativa baja puntuación en la escala de actitudes, constituyen indicadores de una mayor tendencia entre todos sus compañeros de tipología y obviamente entre los de la tipología PF-III, al dominio y adquisición efectiva de las utilidades didácticas de las CG y sobre su incorporación en el currículo de matemáticas de educación secundaria. Curiosamente, la puntuación numérica que obtuvo esta alumna en la escala de actitudes (3.5, la más baja entre sus compañeros) está más próxima a las calificaciones de los alumnos de la tipología PF-I (los más efectivos, reflexivos, críticos y autónomos). Se deduce de esto que el hecho de obtener las mayores puntuaciones en la escala de actitudes no garantiza mayor efectividad en la incorporación y utilización de la CG en el currículo y enseñanza de las matemáticas. En su defecto, estos alumnos se caracterizaron por una falta de autonomía a la hora de proponer y utilizar la CG como recurso organizador del currículo. Estos resultados los interpretamos como expresión de una mayor aquiescencia por parte de estos alumnos frente a las propuestas y tecnologías innovadoras.

6.3.3. Caracterización del grupo PF-II respecto al conocimiento didáctico

De nuevo, como en los análisis de la tipología anterior y, también, tal y como lo hicimos en el Capítulo V en relación con el conocimiento didáctico (CD) base del análisis didáctico y que, en este estudio, se refiere al modelo local de los organizadores, para continuar con el proceso de caracterización de la tipología PF-II, , vamos a considerar como guía la plantilla de análisis estructurada de acuerdo con los tres elementos organizadores principales del modelo y los respectivos ítems A, B, C, D y E de las multitareas iniciales y finales que presentaron los alumnos. Concretamente, estos ítems se refieren a:

A. Selección del tema (conceptos, procedimientos, propiedades, etc.) más importante en relación con el CM.

B. Aspectos más difíciles o errores más importantes sobre el tema seleccionado.

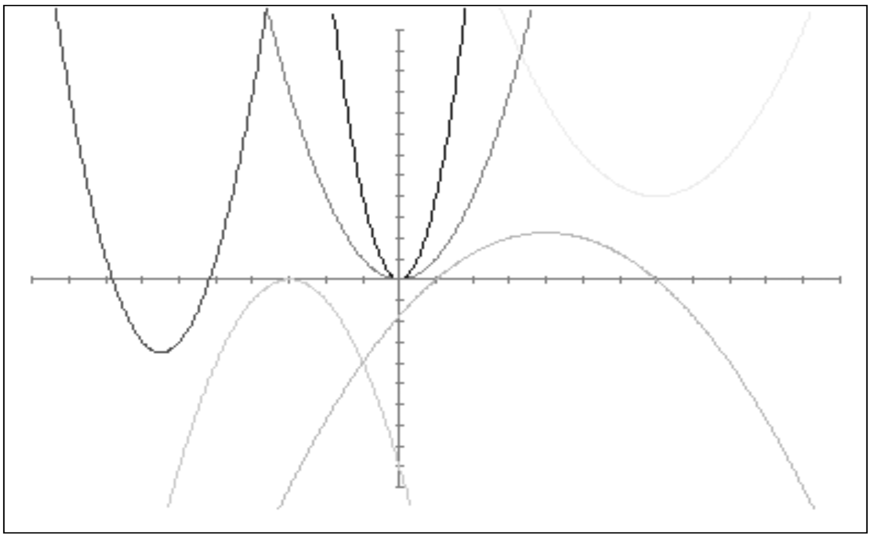
C. Diseño o selección de actividades para la introducción, motivación y desarrollo del tema.

D. Propuesta de evaluación del tema.

E. Indicadores de variación de las propuestas relacionadas con el CD en las distintas producciones de los alumnos.

En relación con la triada de elementos organizadores del modelo local (CM, SR, CG) y con respecto a los ítems A y C, referidos a la elección del tema más importante a enseñar sobre el CM y selección de actividades para la introducción, motivación y desarrollo del tema, los alumnos de la tipología PF-II presentan algunas modificaciones interesantes, aunque no realmente efectivas. Entre estos alumnos, Olga es la que presenta un mayor índice de modificaciones sobre determinados aspectos del CD. Para esta alumna, tanto en su propuesta inicial como en la final, el tema más importante de enseñar y aprender consiste en la "*construcción de funciones cuadráticas*" (de la forma $y=ax^2+bx+c$). Y la estrategia o tratamiento didáctico propuesto para desarrollarlo es "*a partir de la función* $y=x^2$, *mediante traslaciones de esta parábola en el eje de ordenadas y de abscisas*". Pero, en la tarea final, además de retomar el tema inicial, esta alumna plantea además introducirlo mediante "*presentaciones en la pizarra o con proyección de transparencias*", de una serie de parábolas funcionales como las que se muestran en la siguiente Figura 6.9.

Figura 6.9.
Gráficas de parábolas funcionales propuestas por Olga en la tarea final



Posteriormente, propone "*explicarle a los estudiantes el manejo básico de la calculadora*", dándoles las instrucciones mínimas de configuración de la tecnología para representar gráficamente la parábola básica dada por "*la función* $y=x^2$". Luego, a partir de este primer ejemplo, propone "*trabajar con los estudiantes las distintas posibilidades* (transformaciones geométricas) *de la función* $y=x^2$", relacionándolas sucesivamente con los correspondiente parámetros y la expresión canónica del vértice $y=a(x-h)^2+k$. De tal modo que cada transformación geométrica de la gráfica que se va obteniendo se debe asociar con su correspondiente expresión algebraica de la forma canónica del vértice. Esta alumna ha hecho una adaptación personal muy interesante de diferentes propuestas que se hicieron en el curso-taller. En términos muy generales, en el curso-taller se propuso invertir el procedimiento de la enseñanza tradicional que consiste en ir de lo algebraico a lo gráfico, pero siempre centrados en lo algebraico. De éste modo, se considera y trata lo gráfico como simples ilustraciones anecdóticas de lo algebraico y se mantiene el trabajo centrado principalmente en este sistema de representación simbólica. En el curso-taller se propuso trabajar primero sobre lo gráfico considerando cada gráfica como parte del sistema de representación gráfica, realizando visualizaciones didácticas, es decir representaciones, exploraciones, modificaciones y transformaciones geométricas utilizando el entorno de CG-papel-y-lápiz, y luego, en otra sesión, trabajar de lo gráfico a lo simbólico-algebraico. La adaptación que Olga hizo de esta propuesta en su tarea final consistió en trabajar simultáneamente sobre los dos sistemas de representación gráfico y algebraico, utilizando además recursos y estrategias didácticas que, de acuerdo con el diseño de su actividad, ciertamente resultan muy adecuadas y útiles; utilizó estrategias tales como, sucesión de transformaciones geométricas (compresiones, dilataciones y traslaciones horizontales y verticales) adecuadas, a partir de la parábola funcional básica cuya representación algebraica está dada por $y=x^2$; la representación algebraica canónica del vértice y las CG como tecnologías mediadoras y catalizadores entre los diferentes tipos de representaciones. Desde el punto de vista de los intereses de nuestro estudio la adaptación que esta alumna hace resulta relevante. Incluso, creemos que como propuesta didáctica en otros niveles educativos (últimos cursos del Bachillerato y primeros cursos de la Universidad) se le podría sacar partido, pero consideramos que como propuesta para estudiantes de educación secundaria, que seguramente verán este tema por primera vez, puede resultarles muy difícil debido a que integra simultáneamente desde el mismo comienzo dos tipos de representaciones o sistemas de representación, gráfica y algebraica.

De todas maneras, esta alumna, a pesar de no descentrarse de su concepción inicial y habitual (formal algebraica) y de las implicaciones o proyecciones de esta manera de concebir el conocimiento matemático en sus propuestas curriculares, es la que más se destaca y a veces la única que lo logra entre sus demás compañeros de tipología, a la hora de llevar a la práctica con cierta efectividad, tanto su predisposición actitudinal favorable e innovadora, como las nuevas propuestas que les hicimos en el curso-taller. Además, demuestra haber alcanzado cierto dominio en relación con el uso de la CG como recurso didáctico. Así, por ejemplo, hace una selección de instrucciones básicas y adecuadas sobre el manejo de la CG (TI-83), para ser trabajadas con los estudiantes de 2º Ciclo de ESO (15/16 años). Esta alumna propone en su multitarea final que "*el profesor debe trabajar con los estudiantes de* 2º *Ciclo de ESO* (aunque no dice cómo hacerlo en la práctica) *las siguientes instrucciones*" (comandos y menús) de la CG:

1. *Edición de funciones: Tecla* o *y ventana de edición de funciones.*
2. *Configuración de ventana de visualización: Tecla* π *y menú de variables de ventana de visualización.*

3. *Tecla* θ.
4. *Configuración de representaciones gráficas y numéricas:* σ, ρ, ψ+π y ψ+σ.

Como podemos comprobar, sin lugar a dudas, esta alumna ha sabido sacar partido a las propuestas del programa de formación. Recordemos que ninguno de los alumnos para profesores que participaron en el estudio empírico había tenido experiencia alguna con este tipo de CG; y mucho menos, experiencias con propósitos didácticos. Además, esta alumna, aunque sigue centrada en una concepción formal euleriana sobre la función cuadrática, ha accedido a darle un mayor protagonismo a los otros tipos de representación (gráfico y numérico) y se ha preocupado por que sus hipotéticos estudiantes de educación secundaria comprendan o, como suele decir ella "*trabajen*" la relación entre los distintos tipos de representaciones. Para ello, ha incorporado efectivamente la CG en sus nuevas propuestas curriculares. Además, esta decisión la ha tomado con buen criterio de uso de la tecnología, pues efectivamente ha considerado las instrucciones y comandos básicos y mínimos necesarios para una utilización razonable y eficiente de éstas. Podemos asegurar además, que esta alumna no mitifica para nada las CG sino que, por el contrario, las considera solamente como un instrumento mediador de múltiples representaciones y de apoyo para la enseñanza y una mejor comprensión de determinadas nociones y procedimientos sobre el CM en cuestión. Para ella "*la calculadora no es una panacea*" y no pierde de vista que su principal objeto de estudio sigue siendo el tópico matemático en cuestión.

Pero, a pesar de todo este aprovechamiento del curso, de la predisposición actitudinal favorable e innovadora hacia la tecnología, de la integración con cierta efectividad de los diferentes SR y de las CG en sus propuestas curriculares, hemos decidido ubicar a esta alumna en el grupo PF-II y no en el PF-I, básicamente por dos razones. Por una parte, por su proximidad con los otros dos integrantes de la tipología PF-II en los conglomerados obtenidos mediante los análisis *cluster* y de *escalamiento multidimensional*; y, por otra parte, porque las propuestas didácticas que hace, a pesar de la relativa efectividad innovadora, siguen reflejando que tiene una fuerte concepción academicista y formalista (algebraica) sobre el contenido matemático, sin indicadores manifiestos de cambios hacia estructuras más comprensivas, constructivas e integradoras con los distintos aspectos curriculares o del CD.

Los otros compañeros de tipología (Juan y Patricia) hicieron honor a la etiqueta que les pusimos de "no efectivos" a pesar de su clara "predisposición favorable y potencial innovador" en relación con las CG. Estos alumnos, pese a expresar verbalmente opiniones e intenciones favorables hacia la incorporación de las CG en el currículo, no logran llevar estas predicaciones a la práctica. Incluso a veces ni siquiera lo intentan. Estos alumnos siguen anclados en sus concepciones formales, academicistas y tradicionalistas sobre el conocimiento matemático y su enseñanza, y, al menos durante el desarrollo del curso-taller, no dieron muestras de intentar revisarlas, ni mucho menos modificarlas. Además, tampoco dan muestras de hacer algún esfuerzo para adaptar algunas de las nuevas propuestas que les hicimos durante el desarrollo del curso-taller, como sí lo intenta hacer Olga. Estos alumnos, cuando deciden utilizar algunas de las nuevas propuestas, lo hacen en sesiones adicionales y aparte, sin mediar alguna revisión ni adaptación. A diferencia de Olga (y de los alumnos para profesor de la tipología PF-I), estos alumnos acceden y aceptan nuestras propuestas sin ningún cuestionamiento evidente previo ni dar pruebas de dominio de conocimientos didácticos autónomo. Así, por ejemplo, Patricia, en su multitarea final, la cual titula como "*Complemento de la tarea inicial*", propone introducir los distintos temas de la estructura conceptual sobre la función y la ecuación cuadrática, simultáneamente y prácticamente de la misma manera formal y algebraica que en la multitarea inicial. Esta alumna da muy pocas muestras de intentar modificar efectivamente sus propios conocimientos y concepciones sobre el contenido matemático. Por ejemplo, con respecto a las aportaciones del programa, Patricia solamente introduce dos modificaciones relacionadas con la introducción, motivación y desarrollo del tema (ítem C de la plantilla).

La **primera** modificación, del mismo tipo que la de otros alumnos ya analizados, consiste en plantear variaciones en el sistema de representación algebraica (y sin descentrase de él), considerando ahora, además de las expresiones estándares de la función cuadrática y de la ecuación de segundo grado ($y=ax^2+bx+c$ y $ax^2+bx+c=0$), las expresiones canónicas del vértice correspondientes, dadas por las expresiones $y=a(x-h)^2+k$

y $a(x-h)^2+k=0$, respectivamente. En pocas palabras, la manera como propone tratar esto consiste en utilizar la expresión algebraica canónica del vértice como medio para comprender las propiedades algebraica y gráfica de la expresión estándar. O sea, ir de lo algebraico a lo algebraico, que es lo que llamamos como "no descentrarse de lo algebraico":

> *De esta forma la gráfica de* $y=ax^2+bx+c$ *puede ser obtenida a partir de la de* $y=x^2$ *mediante transformaciones geométricas.* (Patricia, Multitarea final).

En particular, esta alumna se preocupa porque inicialmente "*el niño comprenda la relación entre las dos expresiones*" ax^2+bx+c y $a(x-h)^2+k$, respectivamente, y la manera como propone trabajar esto es únicamente mediante la transformación algebraica de la expresión estándar a la canónica, "*procediendo mediante factorización*" o completación de cuadrados. Todas las descripciones y explicaciones adicionales que hace sobre cómo desarrollar todo esto, las hace utilizando básicamente el lenguaje natural con referencias algebraicas, con apoyo frecuente de expresiones simbólico-algebraicas, pero sin utilizar en ninguna ocasión ilustración gráfica alguna ni tampoco la CG. Para esta alumna, la CG se debe introducir y utilizar sólo posteriormente "*cuando el niño ya haya comprendido*" las ideas (nociones y procedimientos) anteriores.

Este último hecho corresponde justamente con la **segunda** modificación que mencionamos en relación con el ítem C (de la plantilla) sobre la introducción, motivación y desarrollo del tema elegido. Este tipo de incorporación de la CG la podemos considerar como utilización de la tecnología como un instrumento de apoyo de la enseñanza tradicional. La mayoría de los futuros profesores de las tipologías PF-III y PF-II le asignan este papel a la CG. Dicho de otro modo, la mayoría de estos profesores en formación no consiguen aceptar la CG como un auténtico elemento organizador para el currículo. Estos alumnos, sólo conciben estas tecnologías como herramientas o recursos didácticos que pueden permitir o facilitar realizar determinados cálculos de una manera más rápida, realizar representaciones gráficas y cálculos numéricos y simbólicos (algebraicos y analíticos) que son demasiado extensos o difíciles, para hacer comprobaciones de resultados obtenidos mediante los métodos tradicionales con papel-y-lápiz, etc.

Para terminar de ilustrar estos análisis y conclusiones, nos referimos a las propuestas de evaluación inicial y final en las respectivas multitareas presentadas por algunos de estos alumnos. Por ejemplo, Patricia, hace inicialmente una propuesta de evaluación convencional y clásica, y muy coherente con sus ideas o concepciones sobre el contenido matemático y su enseñanza-aprendizaje:

Prueba de evaluación (inicial y final):

1. Calcula b para que la parábola $y=x^2+bx+3$ *tenga el vértice en el punto (2, -1).*

2. Sin resolverlas, averigua cuantas soluciones tienen las ecuaciones siguientes: (a) $x^2+9=0$ (b) $x^2-5x=0$ (c) $x^2-2x+6=0$.

3. Resuelve la ecuación $4x^2+x+1=0$.

4. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 32 cm y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo y su área. (Patricia, Tarea final: Prueba de evaluación).

En la multitarea final, esta alumna mantiene la misma prueba de evaluación y dice que no está de acuerdo en que se utilice la CG para resolver dicha prueba. Por su parte, Olga, también propone una prueba de evaluación inicial del mismo estilo tradicional que Patricia:

Prueba de evaluación :

1. Di en qué se parecen y diferencian las siguientes funciones:

(a) $y=x^2$ (b) $y=(x-2)^2+5$ (c) $y=(x-1)^2+3/2$.

2. Escribe la ecuación de la parábola de vértice (0, 5) que pasa por el punto (3, 0). Y luego, escribe la ecuación de la parábola simétrica a ésta.

3. Busca los puntos de intersección de la recta $y=0$ *y la parábola* $y=x^2-3x-10$ *de forma gráfica y analítica.*

4. Se arroja una pelota desde el suelo y la altura viene dada por

$y=-5t^2+10t$ siendo t el tiempo. ¿Cuándo alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esta altura? (Olga, Tarea final: Prueba de evaluación).

Esta alumna propone la misma prueba de evaluación en su multitarea final, pero introduce un matiz interesante sobre el uso de la CG. Este hecho confirma nuestras observaciones y conclusiones sobre esta alumna, como una futura profesora con una postura diferente, más abierta y permeable a nuevas propuestas, aunque todavía no se manifiesten de forma autónoma. De todas formas, es de resaltar la manera como concibe la CG. Ella considera que "*el uso de esta herramienta no sustituye el razonamiento del alumno*" y por eso no tiene ningún problema para aceptar que se utilice para resolver el mismo examen que propuso inicialmente:

> *La misma prueba que propuse en la tarea inicial es igualmente válida, aunque adaptada al uso de las calculadoras gráficas. Considero que el uso de esta herramienta no sustituye el razonamiento del alumno , por lo tanto su comprensión del tema es evaluable de forma análoga. Quizás el ejercicio 3 pueda parecer demasiado fácil, pero para su realización de todas maneras se requiere la comprensión de los conceptos.* (Olga, Tarea final: Prueba de evaluación).

Es posible que en algunos momentos de sus intervenciones así como puntualmente en algunas de sus producciones en su cuaderno de trabajo puedan encontrarse vestigios de transito de la tipología PF-II hacia la PF-I, pero globalmente los análisis conjuntos de sus principales producciones han puesto de manifiesto una tendencia a ubicarse sistemáticamente en la tipología PF-II, junto a Juan y Patricia.

Los anteriores análisis de tipo cualitativo realizados sobre las distintas producciones, intervenciones y protocolos de los alumnos de esta tipología PF-II indican, en síntesis que no logran descentrarse de su concepción academicista, formal y tradicionalista sobre el contenido matemático y el proceso de enseñanza-aprendizaje; y, tampoco consiguen acceder efectivamente a las utilidades didácticas de las CG. Y cuando las introducen en sus propuestas curriculares, como por ejemplo, Juan (véanse cuaderno de trabajo y tareas intermedias en Anexo 4), se han limitado a reproducir fielmente las mismas instrucciones y explicaciones iniciales que se han suministrado y realizado en los guiones de planificación y programación del curso-taller, así como durante su desarrollo. Es decir, estos alumnos no han tenido una producción autónoma y un planteamiento creativo en la forma de relacionarse con el CD.

Entendemos, a modo de conclusión, que el éxito de un programa de formación con las características (temporales, de contenido y estructura) y complejidad como el que proponemos, está garantizado al menos para aquellos alumnos que tengan, además del interés y las primeras intenciones demostradas por los alumnos de la tipología PF-II, cierta capacidad de permeabilidad reflexiva y crítica ante las nuevas propuestas e innovaciones curriculares y tecnológicas, así como una suficiente autonomía para poder interpretar, adaptar y llevar efectivamente a su propia práctica y contexto estas propuestas. Como hemos comprobado, las buenas intenciones primarias e incluso las creencias y opiniones favorables iniciales no resultan suficientes, aunque sí necesarias: No basta con desear ser un buen profesor de matemáticas y asumir una tesitura progresista e innovadora en el discurso sobre las bondades de las tecnologías; además, es preciso actuar en consecuencia y dar pruebas fehacientes de ello, en las estrategias propuestas para la planificación de la enseñanza, en el papel asignado a los SR, en las acepciones implícitas y explícitas del contenido matemático y en los usos concretos que se hacen de las CG en todas estas situaciones.

6.4. TIPOLOGÍA DE PROFESORES EN FORMACIÓN CON ACTITUD FAVORABLE, POTENCIAL INNOVADOR Y EFECTIVOS

Esta tipología de profesores en formación (**PF-I**) corresponde, como la anterior (PF-II), con aquellos estudiantes para profesor que en todas las fases del estudio empírico mostraron una predisposición actitudinal favorable hacia las NTR y un potencial actitudinal innovador hacia el currículo y la enseñanza de las matemáticas en Secundaria. Pero, a diferencia de la anterior, estos alumnos demostraron ser más efectivos, reflexivos, críticos y autónomos a la hora de reflejar en la práctica esta actitud favorable hacia la tecnología, acceder a las nuevas propuestas del programa así como a modificar y adaptar eficazmente (apropiadamente) sus propuestas curriculares iniciales.

Los alumnos que integran esta tipología, **Ana, Isaías y Rosario**, fueron seleccionados del mismo modo que los de las demás tipologías, o sea, a partir de los resultados de los análisis *cluster*, de *escalamiento multidimensional* y cualitativos de sus distintas producciones, y mediante la (triangulación) toma de decisiones por parte de los miembros del equipo investigador. Para el análisis de esta tipología vamos a seguir y utilizar las misma técnicas e instrumentos utilizadas para las tipologías anteriores. En particular, utilizaremos la técnica de triangulación de la información recogida sobre estos tres alumnos para caracterizar la tipología a la manera de un estudio de caso como si se tratara de un sujeto único.

La caracterización con respecto a cada una de las cuestiones o elementos organizadores del modelo particular del currículo en que nos hemos basado en este estudio, procedemos a realizarla a continuación, siguiendo la plantilla de ítems A, B, C, D y E que hemos venido utilizando. Esta caracterización la haremos de forma comparativa y descriptiva con respecto a las anteriores tipologías, procurando establecer las principales características comunes y diferenciales, tanto con los alumnos de las demás tipologías como entre los de la misma tipología **PF-I** que nos ocupa.

6.4.1. Caracterización del grupo de futuros profesores PF-I en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación

Los alumnos de esta tipología, como todos los demás participantes, tanto de esta tercera edición del curso-taller, cuanto de las demás generaciones del programa (estudios pilotos), demostraron tener inicialmente concepciones epistemológicas sobre los tópicos centrales del contenido matemático, del tipo que hemos denominado como “academicista” y “formalista” (*euleriano*). Y sus ideas sobre la enseñanza de estos conocimientos, en términos generales, están basadas en un enfoque experiencial, tradicionalista y poco profesional en el sentido de no estar basadas en conocimientos didácticos rigurosa y sólidamente constituidos. No olvidemos que durante todas las fases y etapas del programa y curso-taller se advirtió e insistió explícitamente a todos los alumnos participantes que tuvieran en cuenta que todas sus producciones iban dirigidas a estudiantes de educación secundaria obligatoria (15/16 años) y que estos verían por primera vez estos conceptos y procedimientos. Las anteriores afirmaciones las podemos comprobar al observar y analizar las distintas producciones e intervenciones de estos alumnos recogidas en sus diferentes tareas, encuestas y protocolos sobre sus actuaciones e intervenciones durante cada una de las sesiones del curso-taller. Observemos, por ejemplo, las definiciones iniciales de dos de estos futuros profesores (Isaías y Rosario):

> *Las funciones cuadráticas son aquellas funciones que tienen como ecuación* $y = ax^2 + bx + c$ *con* $a, b, c \in \Re, a \neq 0$. *Se les suele llamar comúnmente parábolas* (Isaías, Tarea inicial).

> *Una función de segundo grado, también denominada cuadrática, es una función de la forma* $y=ax^2+bx+c$. *Su gráfica es una parábola* (Rosario, Tarea inicial).

De este mismo tipo son todas las demás definiciones iniciales que los alumnos para profesor de esta tipología han formulado sobre los demás conceptos (ecuación, trinomio, etc.) sobre el CM. Estas concepciones academicistas y canónicas del conocimiento matemático, que priman sobre unas maneras de concebirlo y tratarlo más adecuadas para el ámbito escolar, pueden ir bien en la disciplina matemática, donde las propiedades gráficas y sus relaciones con las respectivas expresiones simbólicas pueden ser consideradas anecdóticas y dadas implícitamente, hasta llegar al extremo de prescindir absolutamente de cualquier referencia gráfica y considerar que el término "parábola" es solamente un atributo de la correspondiente expresión algebraica ("*Se les suele llamar comúnmente parábolas*"), y no de los otros tipos de representación y hasta de fenómenos asociados.

Sin embargo, los alumnos de esta tipología, se diferencian de todos los demás por la flexibilidad crítica y efectividad autónoma para modificar y enriquecer, no sólo terminológicamente, sino también conceptual y didácticamente, sus ideas y concepciones iniciales, tal como lo podemos comprobar, comparando sus variadas producciones, actuaciones e intervenciones iniciales con las finales. En particular, lo podemos comprobar al analizar comparativamente sus definiciones finales e iniciales, y, con más profundidad y detalles, sus diagramas conceptuales, como lo mostraremos a continuación. Observemos las definiciones finales de función cuadrática formuladas por Isaías y Rosario en sus respectivas multitareas finales:

> *El concepto de función cuadrática nos viene dada por la conjunción de dos estructuras, una algebraica* $y=ax^2+bx+c$ *y otra gráfica. La unión de ambas, pasando tanto de lo algebraico a lo gráfico, como de lo gráfico a lo algebraico, nos desarrolla el concepto que ha de ser impartido en secundaria.* (Isaías, Tarea final).

> *Una función de segundo grado, también denominada cuadrática, es una función de la forma* $y=ax^2+bx+c$, *que también puede tener la forma* $y = a(x–h)^2+k$. *Su gráfica es una curva llamada parábola* (Rosario, Tarea final).

Al comparar esta definiciones con las correspondientes iniciales, podemos comprobar que estos alumnos introducen aspectos representacionales y didácticos importantes, sobre los cuales insistimos durante el desarrollo del curso-taller. Por ejemplo, Isaías, pone en evidencia haber accedido a una comprensión relevante, trabajada ampliamente en el curso, sobre la naturaleza del concepto, que consiste en no confundir el concepto escolar (en este caso el de función cuadrática) con alguna de sus múltiples representaciones, especialmente con su representación simbólica-algebraica. Todos estos futuros profesores de la tipología PF-I tienen en cuenta el carácter múltiple de las representaciones y de la conveniencia didáctica de interrelacionar con reciprocidad al menos dos tipos (o sistemas) de representación (por ejemplo, el algebraico y el gráfico) como condición para lograr una mejor comprensión del concepto o procedimiento en cuestión.

En el curso-taller para trabajar sobre el concepto de función cuadrática, insistimos en la necesidad y conveniencia de tener muy en cuenta las diferentes opciones cognitivas y didácticas (del análisis didáctico) referidas a los múltiples SR, por ejemplo, al definir los conceptos y representarlos o expresarlos mediante diagramas conceptuales, figuras, palabras, símbolos, etc. En particular, mostramos y reflexionamos sobre algunos referentes históricos, epistemológicos y fenomenológicos que consideramos fundamentales para una perspectiva didáctica escolar de determinados conocimientos y contenidos matemáticos igualmente fundamentales, como es el caso del CM que nos ocupa en esta investigación. Así, por ejemplo, consideramos y reflexionamos desde una perspectiva curricular sobre los diferentes tipos de definiciones formales dadas históricamente por Euler, Dirichlet[3] y Cantor[4], así como y en relación con las que se utilizan hoy día en los diferentes libros de texto escolares y Universitarios.

Si analizamos la definición final de Rosario, observamos que aunque no modifica su concepción formalista (*euleriana*) inicial sobre el concepto de función cuadrática, se decide a modificarla, anteponiendo los intereses escolares sobre el disciplinar. Observemos que introduce una variante representacional que puede resultar útil, sobre todo en casos como estos en que no hay un descentramiento de lo algebraico. La forma canónica del vértice $y=a(x-h)^2+k$, como alternativa complementaria de la forma estándar $y=ax^2+bx+c$, permite visualizar y comprender mejor determinadas propiedades del concepto que representan y la relación entre estas y cada tipo de expresión. Por ejemplo, la forma canónica permite una visualización directa del vértice $V(h, k)$ de la parábola asociada con estas dos expresiones algebraicas y, más aun, facilita la comprensión de la relación entre dicho vértice, la gráfica y los coeficientes de la expresión estándar. Algunos alumnos de otras tipologías también consideran esta opción alternativa de la expresión algebraica canónica del vértice pero lo hacen posteriormente en actividades complementarias y no como una opción representacional alternativa y constitutiva del concepto, tal y como lo hace Rosario al decidirse a incluirla en su definición definitiva.

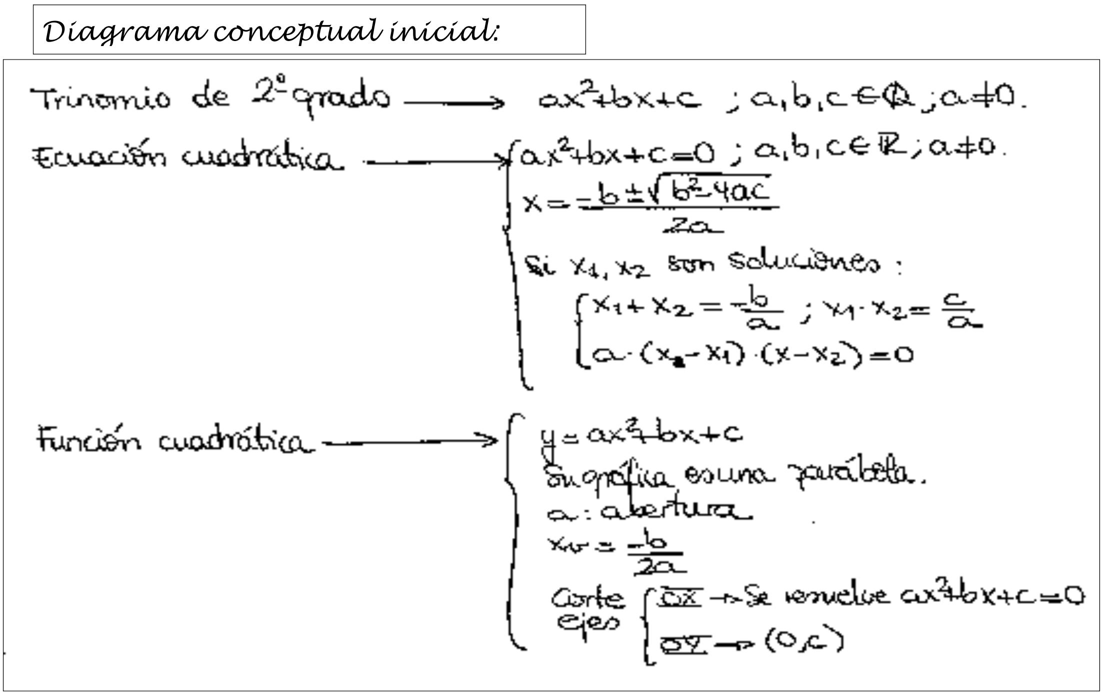
Al analizar los diagramas conceptuales iniciales y finales de los alumnos de esta tipología se pueden observar más profundamente, no sólo las ideas estructurales de estos

[3] Si dos variables x e y están relacionadas de tal manera que si se le asigna un valor a x, automáticamente le es asignado un valor a y mediante una regla de correspondencia, entonces decimos que y es una "función" de x. (Lejeune Dirichlet: 1837).

[4] Una función f, es cualquier conjunto de pares ordenados de elementos tales que si $(x_1, y_1) \in f$, $(x_2,, y_2) \in f$ y $x_1 = x_2$, entonces $y_1 = y_2$. (Georg Cantor: 1897).

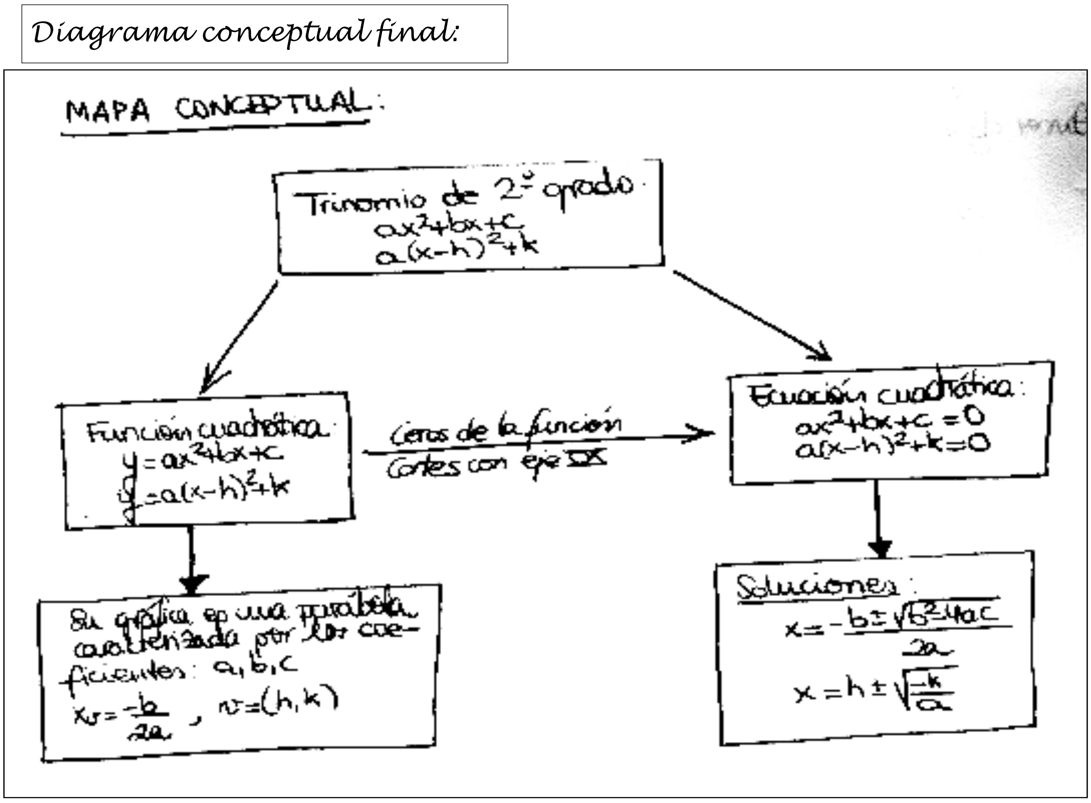
alumnos sobre el CM, sino también las modificaciones que experimentaron durante el desarrollo del curso-taller, en relación con dichas estructuras conceptuales, con respecto a los diferentes sistemas de representación e incluso con respecto a su formación didáctica. Consideramos que las modificaciones estructurales y relacionadas con las múltiples alternativas representacionales se deben en buena parte a las influencias y aportaciones del curso-taller. Con esto sólo queremos subrayar la permeabilidad y flexibilidad reflexiva y crítica de estos alumnos frente a nuevas propuestas curriculares e innovaciones tecnológicas y didácticas. En las Figuras 6.10 y 6.11, y 6.12 podemos comprobar las modificaciones estructurales de dos de los alumnos de esta tipología, puestas de manifiesto en sus respectivos pares de diagramas conceptuales iniciales y finales.

Figura 6.10.
Diagrama conceptual inicial de Rosario (PF-I)



Observemos primero en la Figura 6.10 (Diagrama conceptual inicial Rosario) las variaciones de la riqueza de componentes (ítems, nódulos y conectivos) y del nivel de complejidad. Esta alumna, tal y como lo dijimos anteriormente, a pesar de seguir centrada en una concepción academicista y formalista (algebraica) sobre la naturaleza del conocimiento matemático, introduce algunas variaciones interesantes de carácter estructural (véase Figura 6.11). De una estructura casi lineal y sinóptica sobre la organización del CM, pasa a una estructura bidimensional; y las variaciones o enriquecimiento con respecto a las distintas componentes (ítems, nódulos y conectivos), complejidad estructural (tipo de diagrama) y consideración de alternativas representacionales múltiples se pueden observar simplemente al comparar un diagrama con otro.

Figura 6.11.
Diagrama conceptual final de Rosario



Analicemos ahora los diagramas conceptuales de Isaías (Figura 6.12). Igual que en el caso anterior, el enriquecimiento de componentes y complejidad que introduce este alumno entre el diagrama inicial y el final también saltan a la vista. De una organización jerárquica, en forma de diagrama sinóptico, típica de las concepciones e ideas clásicas y academicista, a una organización radial con varios focos.

Figura 6.12.
Diagramas conceptuales inicial y final de Isaías

Diagrama conceptual inicial:

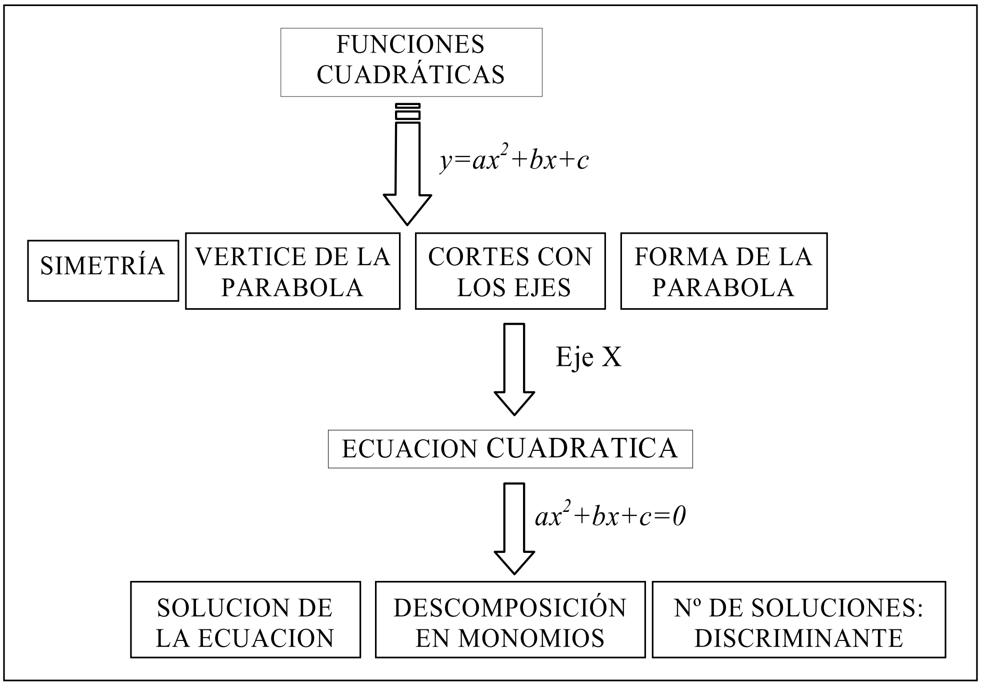
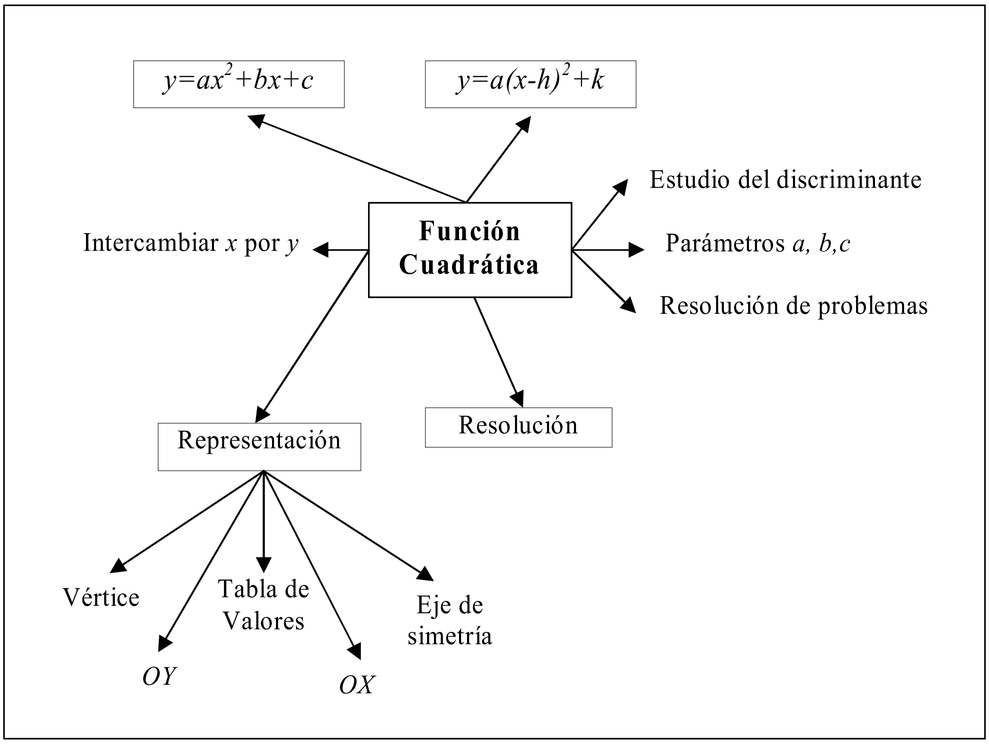


Diagrama conceptual final:



Esta última organización, es más acorde con la complejidad del sistema curricular, tal como lo concebimos, desde la perspectiva de la propuesta del modelo de los organizadores. Por otra parte, en la Tabla 6.6 se presentan las relaciones y variaciones numéricas inicial/final de los diferentes componentes e indicadores de complejidad (índice de elaboración IE) de los diagramas conceptuales presentados por los alumnos de la tipología PF-I y las medias de los otros grupos tipológicos y del grupo-clase. En esta tabla podemos constatar cuantitativamente las observaciones y diferenciaciones cualitativas que hemos hecho al respecto anteriormente.

Tabla 6.6.
Relación inicial/final de ítems, nódulos, conectivos e índices de elaboración (IE) en los diagramas conceptuales de los alumnos de la tipología PF-I

ALUMNOS	**DIAGRAMAS INICIALES**				**DIAGRAMAS FINALES**			
	Ítems	**Nódulos**	**Conectiv**	**IE**	**Ítems**	**Nódulos**	**Conectiv**	**IE**
Ana	7	4	4	2.1	14	14	13	2.9 (38%)
Isaías	16	11	9	2.5	14	14	13	2.9 (16%)
Rosario	16	6	3	1.8	16	5	5	1.6 (-11%)
TOTALES PF-I	**39**	**21**	**16**	**2.1**	**44**	**33**	**31**	**2.5** (19%)
PF-II				2.0				2.3 (15%)
PF-III				2.5				2.6 (4%)
Grupo-clase (Media)	92	52	49	2.1	114 (24%)	80 (54%)	82 (67%)	2.4 (14%)

Se observa que el incremento inicial/final de los indicadores de elaboración (IE) correspondiente a la tipología PF-I (19%) es superior al de todos los demás grupos, incluyendo el grupo-clase (14%). El incremento del IE del grupo tipológico PF-III fue de 4% y el del grupo PF-II (Olga) fue del 15% De esta forma hemos argumentado y documentado la flexibilidad, apertura y tendencia de los futuros profesores de la tipología PF-I a modificar algunos aspectos de sus sistemas de ideas y concepciones sobre la naturaleza e interrelación de dos de los elementos organizadores del currículo del modelo particular de los organizadores, el CM y los SR.

6.4.2. Caracterización del grupo en relación con el conocimiento y las actitudes hacia las calculadoras graficadoras

En los dos casos (tipologías) anteriores, de algún modo las actitudes desfavorables o ineficaz se ponían de manifiesto, no sólo a través de las respuesta a la escala de actitud, la encuesta de evaluación y otras intervenciones (como los episodios de debate y reflexión conjunta), sino también por las propias limitaciones de las propuestas y demás producciones. En esta tipología también, dicha **predisposición favorable y efectiva**, se ha puesto de manifiesto en las propias prácticas y producciones didácticas de estos alumnos. De acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento (conceptual, procedimental y actitudinal) y en particular sobre las actitudes, estas tienen, básica y esencialmente, un carácter dinámico y situado en el contexto de la acción. Por eso, para nosotros, su desfavorabilidad está reflejada también en la no presencia de indicadores efectivos dentro de la misma práctica. Es decir, que no sólo hemos tenido en cuenta para el análisis la escala de actitud y otros instrumentos de opinión y expresión verbal (de intenciones y valoraciones), como indicadores de la predisposición actitudinal de estos alumnos.

Sin embargo, teniendo en cuenta solamente los resultados de la escala de actitud, hemos observado que, además de la actitud favorable e innovadora de estos alumnos, reflejadas en la relativamente alta asignación numérica (véase Tabla 6.6), estos alumnos, casi del mismo modo que Olga, tuvieron un número comparativamente alto de respuestas neutrales (N). Los números totales, por sujeto y por fase (inicia/final), de respuestas neutrales en esta tipología fueron los siguientes: Ana (8/7); Isaías (9/6); Rosario (11/4). Con una media para el grupo de 28/17). Observamos que tiene una variación-grupal negativa de -40%. Frente a los (1/2) de Juan; (3/3) de Patricia y (12/6) de Olga del grupo tipológico PF-II. La media para este grupo es de 16/11, lo cual da una variación grupal negativa de -31%.

De esta forma, podemos comprobar la relativa constancia de los resultados de los alumnos de la tipología de profesores en formación PF-I; con cierta tendencia a disminuir el número de respuestas neutrales hacia la fase final e incrementar la calificación o asignación numérica definitiva (promedio) de sus respuestas a la escala de actitudes, como se puede comprobar en la Tabla 6.7 se observa que, exceptuando a Olga, todos los demás alumnos de las tipologías anteriores PF-II y PF-III, tendieron a incrementar el número de respuestas neutrales o bien a modificarlas muy poco. Observemos, por ejemplo, los casos de Juan y Patricia. El incremento de "calificación" promedio de estos alumnos también fue mínima o, en todo caso, inferior a la de los integrantes de la tipología que nos ocupa en esta sección, o sea la tipología de profesores en formación PF-I.

Figura 6.7.
Asignaciones numéricas promedio para los 40 ítems de la escala de actitud inicial y final, correspondientes a los profesores en formación de la tipología PF-I

Alumnos	**Asign. inicial**	**Asign. final**	**Variación i/f**
Ana	4.1	4.2	2%
Isaías	3.8	4.8	26%
Rosario	3.5	3.8	9%
Promedios PF-I	**3.8**	**4.3**	**13%**
Promedios PF-II	3.9	4.1	5%
Promedios PF-III	3.3	3.4	3%
Promedio grupo-clase	3.7	3.9	5%
Variación global	31%	32%	

En esta tabla podemos observar que los alumnos de la tipología PF-I presentan los mayores promedios de asignaciones numéricas a la escala de actitudes inicial y final, y el mayor índice de variación entre estas dos fases extremas (13%), frente a las demás tipologías (5% y 3%) y el grupo-clase (5%), respectivamente. Esto verifica los análisis - descriptivos (cualitativos) y las conclusiones inferidas acerca de la mayor permeabilidad y flexibilidad de los alumnos de la tipología PF-I sobre los de las demás tipologías, en relación con sus concepciones y actitudes sobre los diversos elementos conceptuales y procedimentales estructurados sistémicamente en el modelo particular de los organizadores para el currículo de matemáticas de educación secundaria.

Una revisión más detallada e individualizada de las respuestas de estos alumnos a la escala de actitudes, tal y como la hicimos en el capítulo anterior, permite confirmar esta variación positiva hacia la incorporación y utilización de las CG en el currículo y la enseñanza del CM en secundaria. Además, la relativamente alta y decreciente frecuencia de respuestas neutrales iniciales y finales, reflejan una actitud, que bien podría ser de duda o de reserva inicial y reflexividad crítica frente a las nuevas tecnologías y propuestas que se les presentan. Los análisis descriptivos realizados sobre sus demás producciones y protocolos de sus intervenciones permiten confirmar estos tipos de actitudes de los alumnos. En principio se muestran interesados pero reservados, porque esperan conocer un poco más las nuevas propuestas y tecnologías, antes de decidir si acogerlas o no dentro de sus sistemas de ideas y propuestas sobre la enseñanza de las matemáticas. Incluso, están dispuestos a introducir modificaciones y adaptaciones a sus maneras de concebir, definir y presentar los tópicos del CM con propósitos didácticos si estos lo requieren y están justificados. Pero para asumir tales justificaciones y realizar tales modificaciones es necesario disponer de una buena formación didáctica. La racionalidad de las actitudes, justificaciones y modificaciones de concepciones y propuestas efectivas y eficaces requieren de una buena formación sobre los conocimientos didácticos de carácter teórico-prácticos, que son básicos para poder llevar a cabo un análisis didáctico fundamentado, el cual se concreta en estas modificaciones de las concepciones sobre el CM y su enseñanza y en las modificaciones concretas de sus propuestas curriculares iniciales.

A diferencia de los otros alumnos, por ejemplo, de la tipología PF-III ("reacios"), que tienen una mayor y resistente predisposición a rechazar la incorporación en el currículo y utilización de las CG para la enseñanza de las funciones, o los de la tipología PF-II ("aquiescentes") que tienen una predisposición favorable y un potencial innovador permanentes (pero no efectivos, críticos, ni autónomos) hacia estas tecnologías, los alumnos de la tipología PF-I ("efectivos"), además de mostrarse abiertos e interesados en experimentar modificaciones positivas en sus concepciones, esquemas e ideas sobre la naturaleza del CM y sobre su enseñanza, también se han mostrado reflexivos y críticos frente a las expectativas favorables o de dudas que inicialmente suelen generar en unas y otras personas las propuestas con etiqueta de innovadoras.

Otra característica de los alumnos de la tipología PF-I, que también refleja de alguna manera su reflexividad crítica, tiene que ver con la convicción que han desarrollado y demostrado a lo largo del curso, acerca de, por una parte, la necesidad de introducir reformas en el currículo y en las estrategias didácticas de enseñanza-aprendizaje, y, por otra parte, la complementaria y necesaria formación didáctica y tecnológica de los futuros profesores de matemáticas. Veamos lo que opinan los alumnos de este grupo en las reflexiones que hacen sobre la encuesta de evaluación final del curso-taller:

> *Veo la calculadora como un instrumento tecnológico muy útil para aprender matemáticas. Antes de haber venido al cursillo pensaba todo lo contrario. Creía que las calculadoras podían crear dependencias y problemas... Pero ahora creo que habría que modificar los objetivos y la manera de plantear los contenidos para poder utilizar bien la calculadora... Creo que este tipo de cursos se deberían introducir como una asignatura más en la carrera de matemáticas, porque me parece bastante importante que los futuros profesores como vamos a serlo nosotros sepamos sacarle todo el partido a las calculadoras* (Ana, Encuesta de evaluación final del curso-taller).

> *Las calculadoras permiten un cambio en la búsqueda de objetivos curriculares distintos a los que hoy están establecidos, fomentando una matemática práctica, diversificada e integradora... Pero, sería necesario cambiar la metodología de clase. Los problemas prácticos adquirirían un papel predominante en la enseñanza secundaria...*
> *En conclusión, considero este curso beneficioso, tanto para futuros profesores como para profesores consagrados. La visión que nos da la calculadora inicialmente y a simple vista es la de ser una herramienta de apoyo y de motivación de la matemática. Pero, como he comentado, es necesario hacer un poco de más hincapié en las posibilidades de utilización y programación de las calculadoras como un instrumento útil para el desarrollo de multitud de cuestiones nuevas que se les puede plantear a los alumnos en una clase de matemáticas* (Isaías, Encuesta de evaluación final del curso-taller).

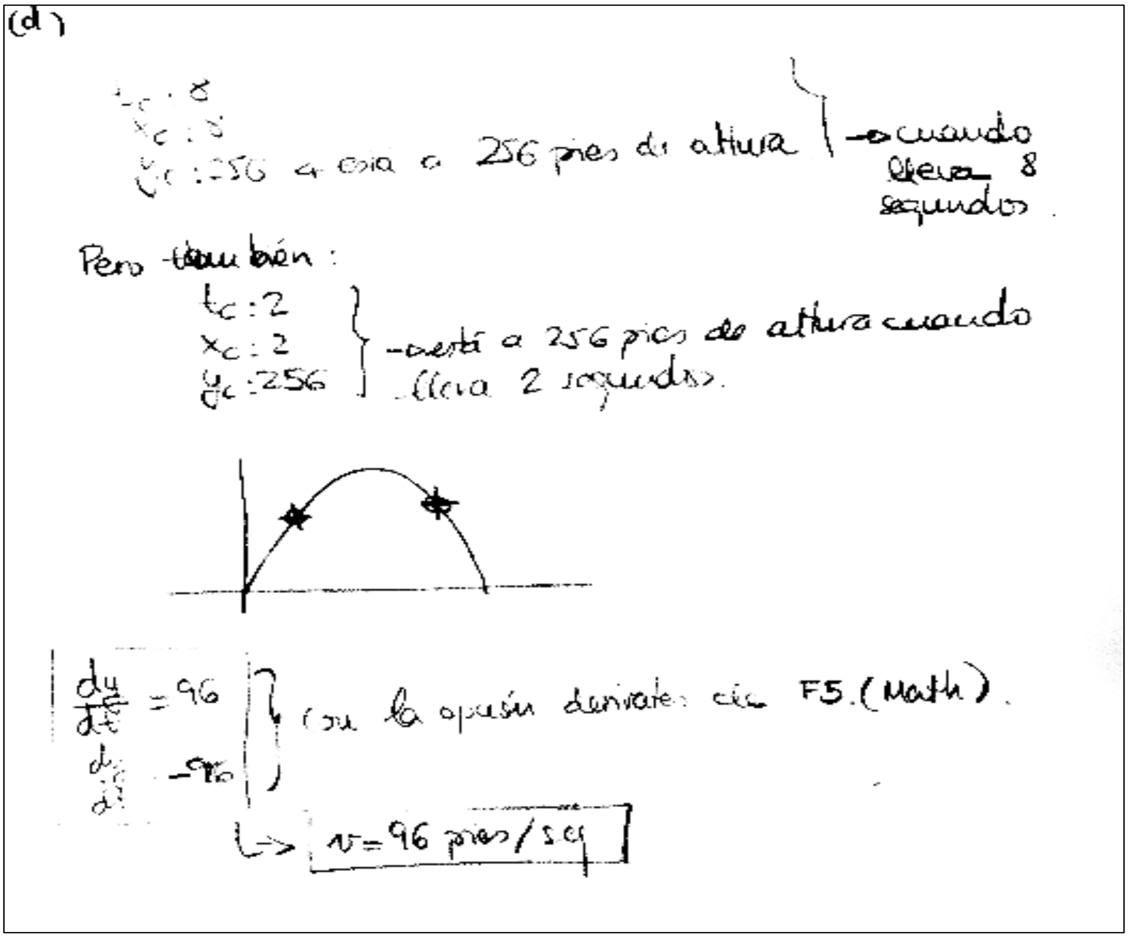
> *Para introducir las calculadoras gráficas en el currículo, debería cambiarse la metodología tradicional, por una más interactiva y que dé más libertad a los profesores y estudiantes para elegir distintos caminos de resolución de problemas. Ya no se haría tanto hincapié en*

el dominio de algoritmos, con el consiguiente incremento de la comprensión de los conceptos y el descubrimiento por sí solos de propiedades, relaciones, etc... Así mismo, la evaluación no se centraría en el tradicional dominio de algoritmos, sino más bien en la comprensión de los conceptos trabajados en clase. Pero, en la evaluación habría que pedir cosas que la calculadora no pueda hacer automáticamente, sino que el alumno se vea obligado a razonar y se ayude con la calculadora para su resolución (Rosario, Encuesta de evaluación final del curso-taller).

Las anteriores respuestas y reflexiones de estos alumnos sirven para ejemplificar el perfil general o características comunes de los futuros profesores que integran la tipología PF-I, desde el punto de vista de sus actitudes, potencial innovador, opiniones e intenciones hacia la incorporación de la tecnología en el currículo y en el aula de matemáticas para la enseñanza de las funciones.

Otra característica diferencial con respecto a todos los demás alumnos del curso-taller, de las otras tipologías y en relación con el dominio efectivo de las CG, consiste en que en la práctica, cuando se refieren a las distintas posibilidades y utilidades didácticas de la tecnología, no se limitan a reproducir fielmente como los alumnos de la tipología PF-II ("aquiescentes"), ni a rechazar de plano y en la práctica las nuevas aportaciones y propuestas curriculares al respecto, como los alumnos de la tipología PF-III ("reacios"). A efectos de ilustrar esto, presentamos a continuación un facsímil de la tarea intermedia de Rosario (Figura 6.13), sobre la simulación y modelización de la trayectoria del proyectil lanzado verticalmente hacia arriba. Obsérvese a la vez las producciones de los alumnos de las otras tipologías en los apartados correspondientes (7.3. Tipología PF-II y 7.2. Tipología PF-III).

Figura 6.13.
Facsímil de la tarea intermedia de Rosario (PF-I) sobre la modelización y simulación del problema del proyectil



(d)

$t_c : 8$
$x_c : 8$
$y_c : 256$ → esta a 256 pies de altura → cuando lleva 8 segundos.

Pero también:

$t_c : 2$
$x_c : 2$
$y_c : 256$ → está a 256 pies de altura cuando lleva 2 segundos.

$\frac{dy}{dt} = 96$
$\frac{dy}{dt} = -96$
con la opción derivate: en F5. (Math).

→ $\boxed{v = 96 \text{ pies/seg}}$

Compárense las exploraciones y variaciones que hace esta alumna con las que hacen sobre la misma tarea, por ejemplo, lo alumnos de la tipología PF-II. Obsérvese que incluso en la parte (d), utiliza por iniciativa propia (autónomamente) las opciones *6:Derivatives* (*dy/dx* y *dy/dt*) del menú *F5: Math* de la ventana de visualización de gráficas de la calculadora graficadora TI-92, para obtener la velocidad (*v=96pies/seg*) en el instante *t=8seg*. Estas opciones o comandos no las habíamos considerado en la programación del curso-taller (por problemas de tiempo y planificación). Estos ejemplos sirven para ilustrar el tipo de dominio efectivo y autónomo de la tecnología que alcanzó esta alumna (al séptimo día del curso-taller). A diferencia de la mayoría de alumnos de las otras tipologías, consigue sacarle más partido a la tecnología y a las propuestas de dominio que el aportado en el curso.

La predisposición actitudinal favorable hacia la tecnología, la voluntad de cambio, la apertura a las propuestas y tecnologías innovadoras, una postura reflexiva y crítica frente a "lo establecido" o tradicional (en relación con el CM y su didáctica) y las nuevas propuestas curriculares y tecnológicas, así como la capacidad, compromiso y voluntad para intentar llevar a efecto las nuevas propuestas y sacarle partido autónoma y creativamente a las tecnologías, son, en resumen, las principales características generales que nos permiten definir el perfil de estos futuros profesores de la tipología **PF-I**, que hemos caracterizado en términos generales como tipología de profesores en formación con una predisposición actitudinal favorable y un potencial actitudinal innovador y efectivo hacia la integración y utilización de las CG en el currículo y la enseñanza del CM en la Educación Secundaria.

6.4.3. Caracterización del grupo PF-I con respecto al conocimiento didáctico

Empecemos por señalar que en relación con la incorporación de las nuevas propuestas y tecnologías las primeras reflexiones y conclusiones de los futuros profesores de la tipología PF-I se refirieron críticamente a la necesidad y conveniencia de reformar y mejorar los procesos actuales de formación de los profesores de matemáticas y sus propias concepciones sobre el conocimiento matemático y su enseñanza (reflexión autocrítica). Véanse, por ejemplo, algunas de las respuestas de los tres alumnos de esta tipología dadas en la encuesta y debates de evaluación final del curso, que presentamos más adelante (pág. 413 y 414). Esta conciencia y convicción de la necesidad de un "*cambio curricular y didáctico*", así como de sus propias maneras de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza, lo tienen claro, tiene que ser a través de los procesos de formación didáctica que reciben o deben recibir los futuros profesores de matemáticas en el propio plan de estudios de la Licenciatura:

> *Creo que este tipo de cursos se deberían introducir como una asignatura más en la carrera de matemáticas, porque me parece bastante importante que los futuros profesores como vamos a serlo nosotros sepamos sacarle todo el partido a las calculadoras* (Ana, Encuesta de evaluación final del curso-taller).

Además, hay que resaltar las constantes criticas por parte de estos alumnos frente a los métodos de enseñanza tradicional o "*típica*" e inclusive frente a las concepciones clásicas sobre la naturaleza de la matemática. Proponen una concepción más subjetiva y autónoma que institucional y academicista, y una enseñanza más constructiva, basada en la resolución de problemas, en oposición a la "*enseñanza típica basada en el aprendizaje de algoritmos*", la cual, como dice Rosario, "*con la incorporación de la tecnología perderían mucho peso*" (Rosario, Encuesta de evaluación final).

Siguiendo la guía de la plantilla de cuestiones e indicadores de análisis, continuamos la caracterización de la tipología **PF-I**. Es decir, tendremos en cuenta los siguientes ítems: (A) elección y presentación del CM, (B) introducción, motivación y desarrollo, (C) principales errores y dificultades, y (D) propuestas de evaluación. Digamos que los futuros profesores de la tipología PF-I tienen la misma concepción clásica y formalista (*euleriana*) sobre los distintos conceptos y procedimientos del contenido matemático, y la misma concepción sobre la enseñanza de la matemática, basada en las experiencias propias que han tenido como alumnos de matemáticas a lo largo de sus vidas de estudiantes.

Los alumnos tienen la tendencia a usar un discurso también tradicional en el ámbito escolar, basado en un híbrido de lenguajes natural y algebraico, con muy pocas o ningunas representaciones gráficas. Cuando hay alguna referencia gráfica esta suele estar dada en lenguaje natural. Además, también asumen muchas relaciones entre diferentes nociones y procedimientos que son claves para su comprensión, como si estas nociones y sus significados estuvieran dadas implícitamente. Aunque, sólo los futuros profesores de la tipología PF-I (reflexivos y con intenciones más efectivas) acceden a reflexionar críticamente sobre estas concepciones y situaciones "*ya establecidas y cotidianas*" (Isaías, Episodio de debate y evaluación final) y empiezan a revisarlas para modificarlas y adaptarlas a las nuevas propuestas curriculares, didácticas y tecnológica.

Así, por ejemplo, sobre la elección y presentación del contenido específico, que nos ocupa, Isaías, inicialmente hace la siguiente selección:

(a) El algoritmo mediante el cual se deduce la fórmula general de las soluciones de la ecuación cuadrática.
(b) Las propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática, tales como, número de soluciones en función del signo del discriminante; y las relaciones entre la suma y el producto de las soluciones con los coeficientes a, b y c de la ecuación.
(c) El concepto de función cuadrática y su gráfica.
(d) Las propiedades de la gráfica de la función cuadrática: simetría, vértice, intersecciones de la parábola con los ejes y formas de la parábola en función del valor absoluto y signo del coeficiente principal a.

Para la presentación, motivación y desarrollo de estos temas, inicial e implícitamente propone utilizar el híbrido de lenguajes tradicional y sin ningún tipo de representación gráfica. Por ejemplo:

El vértice de la parábola tiene como componente respecto al eje X el valor $\frac{-b}{2a}$ *... Y los puntos de corte con el eje X se obtienen al resolver la ecuación que se obtiene al igualar a cero la expresión de la función* ax^2+bx+c (Isaías, Tarea inicial).

En la tarea final, propone los mismos temas seleccionados en la tarea inicial, con el mismo estilo formalista y academicista, pero, agrega comentarios o recomendaciones como las siguientes:

Para llegar a una visualización gráfica de la función cuadrática $y= ax^2+bx+c$, *hay que hacer primero un estudio algebraico de la otra versión algebraica* $y=a(x-h)^2+k$, *donde* (h, k) *son las coordenadas del vértice* (Isaías, Tarea final: Propuesta de introducción y desarrollo del tema).

Salvo esta modificación e introducción de la expresión algebraica canónica del vértice $a(x-h)^2+k$, lo cual ya comentamos en detalle al caracterizar las otras tipologías (véanse, por ejemplo, los casos de Mª. Jesús de la tipología PF-III, Olga y Patricia de la tipología PF-II), hasta aquí este alumno no ha dado muestras de un cambio sustancial. Lo mismo ocurre con las otras dos alumnas del grupo. Por ejemplo, Rosario, considera inicialmente como temas más importantes los conceptos de "*trinomio de segundo grado, ecuación cuadrática y función cuadrática*", con sus respectivas y principales propiedades algebraicas.

Rosario hace la presentación inicial de estos temas esencialmente de la misma manera que sus compañeros, con un enfoque formalista, utilizando el híbrido tradicional de lenguaje natural y algebraico, asumiendo muchas relaciones y su comprensión como si estuvieran dadas implícita o inmediatamente. Por ejemplo, cuando dice:

> *Una expresión de segundo grado como* ax^2+bx+c*, admite varias expresiones equivalentes, como por ejemplo,* $a(x-h)^2+k$*. El cambio de una a otra se realiza mediante el procedimiento de completar cuadrados ... A veces estas expresiones se nos presentan escritas mediante otra expresión también equivalente que quitando paréntesis da lugar a la forma inicial anterior* (Rosario, Tarea inicial).

Al revisar la multitarea inicial de esta alumna podemos comprobar que las gráficas e inclusive sus referencias en lenguaje natural, están ausentes. Su discurso está totalmente centrado en el híbrido tradicional de lenguajes y asume algunas relaciones, nociones y procedimientos como si estuvieran dadas y comprendidas implícitamente. Como por ejemplo, cuando omite la expresión algebraica factorizada $a(x-x_1)(x-x_2)$ en el último párrafo de su cita anterior: "*A veces estas expresiones se nos presentan escritas mediante otra expresión también equivalente que quitando paréntesis da lugar a la forma inicial anterior*". Seguramente, esta alumna tiene esta expresión factorizada en su mente, pero supone que la expresión y su significado están dadas implícitamente como un hecho y por eso no las menciona ni explica explícitamente. En todo el discurso inicial de esta alumna las referencias gráficas brillan por su ausencia.

Luego, en la tarea final, de la misma manera que sus compañeros de grupo y de otros, como Olga y Patricia (PF-II) y Mª. Jesús (PF-III), empieza a considerar de manera sistemática la expresión canónica del vértice $a(x\text{-}h)^2\text{+}k$. Como por ejemplo, cuando propone (en la tarea final) deducir la fórmula estándar de las soluciones de la ecuación cuadrática en función de las coordenadas (parámetros) del vértice, para lo cual propone deducir y considerar la fórmula siguiente: $x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}}$.

Estos análisis y hechos ponen de manifiesto que estos alumnos para profesores han comprendido la importancia de considerar múltiples alternativas representacionales y trabajar no sólo las relaciones entre diferentes tipos de representación, sino también el carácter estructural y sistémico de cada sistema de representación, en particular del SRG, a través del tratamiento de propiedades del concepto en cuestión en el mismo SRG, o en términos de Duval (1993, 1999*b*) "tratamientos" o "transformaciones internas" sobre un mismo sistema de registros o de representaciones externas. De hecho, en la multitarea final de Rosario aparece de manera frecuente y sistemática el lenguaje de las gráficas. Y, el protagonismo que le empiezan a dar todos los estudiantes para profesor de la tipología PF-I a la expresión canónica del vértice, en relación con la ecuación y la función cuadrática, tiene como principal propósito, facilitar la comprensión de las relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas.

Todos los alumnos de la tipología PF-I coinciden con los de las otras tipologías en que también consideran y proponen utilizar la expresión canónica del vértice (Mª. Jesús, PF-III, Olga y Patricia, PF-II), y tenerla en cuenta. Estos otros alumnos la reducen a una simple transformación algebraica mediante la técnica algorítmica de completación de cuadrados, entre la expresión estándar $ax^2\text{+}bx\text{+}c$ y la canónica $a(x\text{-}h)^2\text{+}k$. Solamente los tres alumnos de la tipología PF-I y, parcialmente Olga, encuentran una funcionalidad más efectiva a las CG en relación con esta expresión canónica y sus representaciones gráficas. La gran profusión de representaciones gráficas de funciones y de familias de funciones, la necesidad de resolver rápidamente muchos ejercicios y situaciones en las que hay que obtener datos mediante cálculos frecuentes, útiles para la comprensión y solución de problemas, propiedades, conceptos y procedimientos involucrados, prácticamente los obliga a recurrir a las utilidades de la tecnología, como las diferentes opciones de representación, visualización y exploración interactiva de gráficas, tablas de valores y expresiones simbólicas, para las cuales tienen de antemano una predisposición favorable, un potencial actitudinal innovador y la voluntad y autonomía necesarias con respecto a su manejo y dominio efectivo y básico de la tecnología.

Veamos a continuación lo que proponen en sus multitareas iniciales y finales y analicemos las modificaciones que introducen entre una fase y otra en relación con (B) las actividades de introducción, motivación y desarrollo y (C) las principales dificultades y errores de enseñanza-aprendizaje sobre el tema o los temas seleccionados del CM, los SR y sobre las CG. Por ejemplo, Isaías propone en su tarea inicial para introducir y motivar el tema, una actividad típica o tradicional que consiste en formular el enunciado de una situación problema:

> *Consideremos una cuerda de 12 cm. atada por sus dos extremos. Gracias a ella podemos formar de manera fácil un rectángulo de perímetro 12 cm. Observamos que podemos construir muchos rectángulos dependiendo de cómo cogemos la cuerda. A partir de este enunciado, los estudiantes deben obtener sucesivamente: (a) Una tabla de valores con 8 pares de datos (base, altura). (b) Representar los puntos en un diagrama cartesiano. (c) Completar y trazar la gráfica correspondiente. (d) Encontrar la expresión algebraica que modeliza la relación entre la altura y la variable. En este último punto el estudiante se dará cuenta que la expresión no es la de una recta y con la ayuda del profesor se dará cuenta que es una función cuadrática* (Isaías, Multitarea final)

En realidad, la única parte del problema que podría tener algún interés didáctico en la manera de formular este problema es la (d). Pero, tal y como está propuesto, resulta ser un falso problema didáctico. Porque, de acuerdo con el enunciado, lo que el profesor esperaría es que sus alumnos puedan asociar visualmente la forma de la gráfica con una expresión algebraica cuadrática, que al final, él mismo tendría que darles. De este modo, los estudiantes no participan activamente de ningún proceso de descubrimiento ni de construcción de la expresión algebraica y de las distintas nociones y procedimientos involucrados en la estructura conceptual y fenomenológica que representa.

Durante el desarrollo del programa trabajamos varios ejemplos como estos, pero basados en el uso de las CG y como procesos de construcción y comprensión activa y significativas de nociones, procedimientos, relaciones y propiedades asociadas con la estructura conceptual de la función cuadrática y sus aplicaciones en contextos escolares, por parte de los propios estudiantes (véase, por ejemplo, la "actividad del agua" en el guión de la segunda y tercera sesiones del programa). Sin embargo, ninguno de los alumnos para profesores hasta ahora han tenido en cuenta este tipo de actividades basadas en el uso de la tecnología.

Este mismo alumno (Isaías), coherentemente con sus concepciones o ideas sobre el tema y sobre su propuesta de introducción, considera como nociones y procedimientos más difíciles e importantes, el proceso de modelización que permite obtener la expresión (ecuación) algebraica estándar correspondiente, concebida como representación de la situación-problema, y el proceso de "*deducción*" u obtención de la fórmula cuadrática que resuelve de forma general la ecuación. Para él, la comprensión de esto es importante porque:

> *Esto suele provocar en los alumnos la idea de que la ecuación y la fórmula surgen, por así decirlo, como por arte de magia* (Isaías, Tarea inicial).

En su multitarea inicial, este alumno tampoco considera el juego de los SR múltiples y las utilidades de las CG ni de ninguna otra tecnología (a pesar que manifestó conocer bastante algunos programas como *Derive* y *Mathematica*). Es decir, no integra estos elementos –EC, SR y CG- como organizadores de la práctica curricular o didáctica, y como ayuda para el tratamiento de estas dificultades y errores. Sin embargo, en su tarea final, que realiza parcialmente con Ana, modifica esta apreciación y basándose en las nuevas ideas aportadas en el curso-taller, plantea que la fuente de mayor dificultad consiste en la relación entre la expresión simbólica y la representación gráfica.

> *Pensamos que es en este punto cuando en secundaria se tienen más problemas, pues no se suele contemplar las relaciones existentes entre la expresión algebraica, la resolución de la ecuación y la representación gráfica* (Ana e Isaías, Multitarea final).

Estos alumnos, consideran que los "*problemas*" de las dificultades, introducción y desarrollo del tema sobre las funciones y ecuaciones cuadráticas son similares, aunque más simples, en el caso de las lineales, sobre las cuales consideran que, de todos modos, no se profundiza suficientemente en la educación secundaria. Por estas razones, proponen en sus multitareas finales desarrollar una serie de actividades y ejercicios sobre las "*funciones polinómica de primer grado*", considerando estos aspectos cognitivos de las dificultades y sus causa, y utilizando la CG de una manera más sistemática, como herramienta de apoyo para desarrollar estas actividades y ejercicios. En realidad, estos alumnos desarrollaron la tarea final sobre este tema de las funciones lineales porque iban a utilizarlo en otra actividad profesional por fuera del curso-taller.

> *Nosotros seguimos con el tema de las funciones, pero sin hacer más hincapié en las cuadráticas, sino en sus hermanas menores, que por su simplicidad muchas veces quedan inconexas o inacabadas. Nuestro tema versará sobre funciones polinómicas de primer grado (funciones lineales y funciones afines)* (Ana e Isaías, Multitarea final conjunta).

Estos alumnos, despues de proponer una situación-problema en la que se suministran una serie de parejas de datos numéricos, sugieren a los estudiantes de secundaria para los cuales está dirigida, que obtengan la gráfica (línea recta) correspondiente. Luego definen y explican algunos términos, nociones y procedimientos fundamentales, tanto sobre la estructura matemática en cuestión, como sobre las posibilidades y utilidades de las calculadoras. Y posteriormente proponen una serie de actividades y reflexiones sobre el tema, gradualmente más difíciles o "*profundas*". Por ejemplo, proponen actividades como las siguientes:

> *Diseña ejemplos de otras funciones, haciendo su representación gráfica con la CG, a la vez que establece una pequeña tabla de valores utilizando la opción "Table" para cada de las funciones que hallas obtenido... ¿Que ocurre si cambias el valor de la pendiente "m" por un número negativo? ¿Cómo cambia la gráfica según sea más o menos grande el valor de "m"? Experimenta con tu calculadora* (Ana e Isaías, Multitarea final conjunta).

Más adelante, estos alumnos proponen actividades mucho más difíciles, las cuales consideran se pueden proponer y que los estudiantes de secundaria pueden resolver gracias a las calculadoras graficadoras:

> *Para profundizar más en éste tema realizaremos ahora cuestiones un poco más profundas que las anteriores: Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 6)$ utilizando la CG.*
> *Mediante pruebas de ensayo y error utilizando la CG calcula gráficamente el valor de "n" para que la gráfica de la función dada por $y=2x+n$ pase por el punto $A(1, 3)$...* (Ana e Isaías, Multitarea final conjunta).

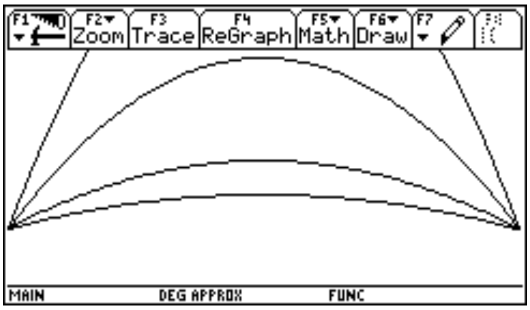
Así sucesivamente estos dos alumnos continúan proponiendo una serie de problemas y ejercicios cada vez más difíciles y que van haciendo imprescindible el uso de la CG. Para la prueba de evaluación final dicen que mantienen las mismas de sus respectivas multitareas iniciales, las cuales tratan sobre la función y la ecuación cuadrática, pero ahora permiten que los estudiantes de secundaria utilicen las CG para resolverlas. Y como conclusión sobre los temas y diferentes actividades propuestas en su multitareas final conjunta, estos dos alumnos plantean que:

> *Como conclusión, sólo debemos hacer más hincapié en cómo la resolución de una cuestión concreta (situación-problema), se ve fundamentada por una visión tanto algebraica como numérica y gráfica, que se complementan a la vez que establecen puntos de vista que pueden ser recorridos en ambos sentidos* (Ana e Isaías, Multitarea final conjunta).

Por su parte, Rosario, también en su tarea inicial propone como actividad de introducción y motivación del tema, un problema similar al de Isaías. Es decir un enunciado de una situación-problema, a partir del cual hay que obtener unos datos numéricos (los cuales, en realidad ella da implícitamente en el enunciado), luego obtener una gráfica y a partir de esta "*deducir y reconocer*" la relación entre la gráfica parabólica y el problema que modeliza. Todo esto se dice sin explicar cómo hacerlo, igual que la mayoría de los alumnos. Es como si consideraran que los conocimientos didácticos necesarios para llevar a efecto sus propuestas, estuvieran dados también implícitamente y como un hecho de sentido común. Sin embargo, esta alumna, en su tarea final, introduce modificaciones radicales y relevantes, basadas en los puntos de vista de las orientaciones didácticas del programa y trabajadas en el curso-taller.

Por ejemplo, aunque retoma la misma situación-problema inicial para la introducción y motivación del tema, en su manera de abordarlo le da un vuelco total, consistente en un tratamiento didáctico basado exclusivamente en los aspectos representacionales gráficos de la situación-problema y con el apoyo permanente y desde el comienzo de la CG. Primero, propone presentar a los alumnos un dibujo de un niño lanzando una pelota hacia una canasta y les pide que de la misma forma dibujen "*otras trayectorias posibles de la pelota de tal manera que entre en la canasta, pero sin dar en el tablero*". Después de una "*discusión y puesta en común*" al respecto, propone que el profesor o la profesora represente gráficamente algunas trayectorias mediante la calculadora, probablemente como lo indicamos en la Figura 6.14, aunque ella no muestra este tipo de figura en su tarea final, probablemente porque no tiene en casa los recursos tecnológicos (ordenador, calculadora, *Graph Link* y demás accesorios de interconexión entre el ordenador y la calculadora). De hecho, la tarea final la ha realizado a mano utilizando sólo papel y bolígrafo.

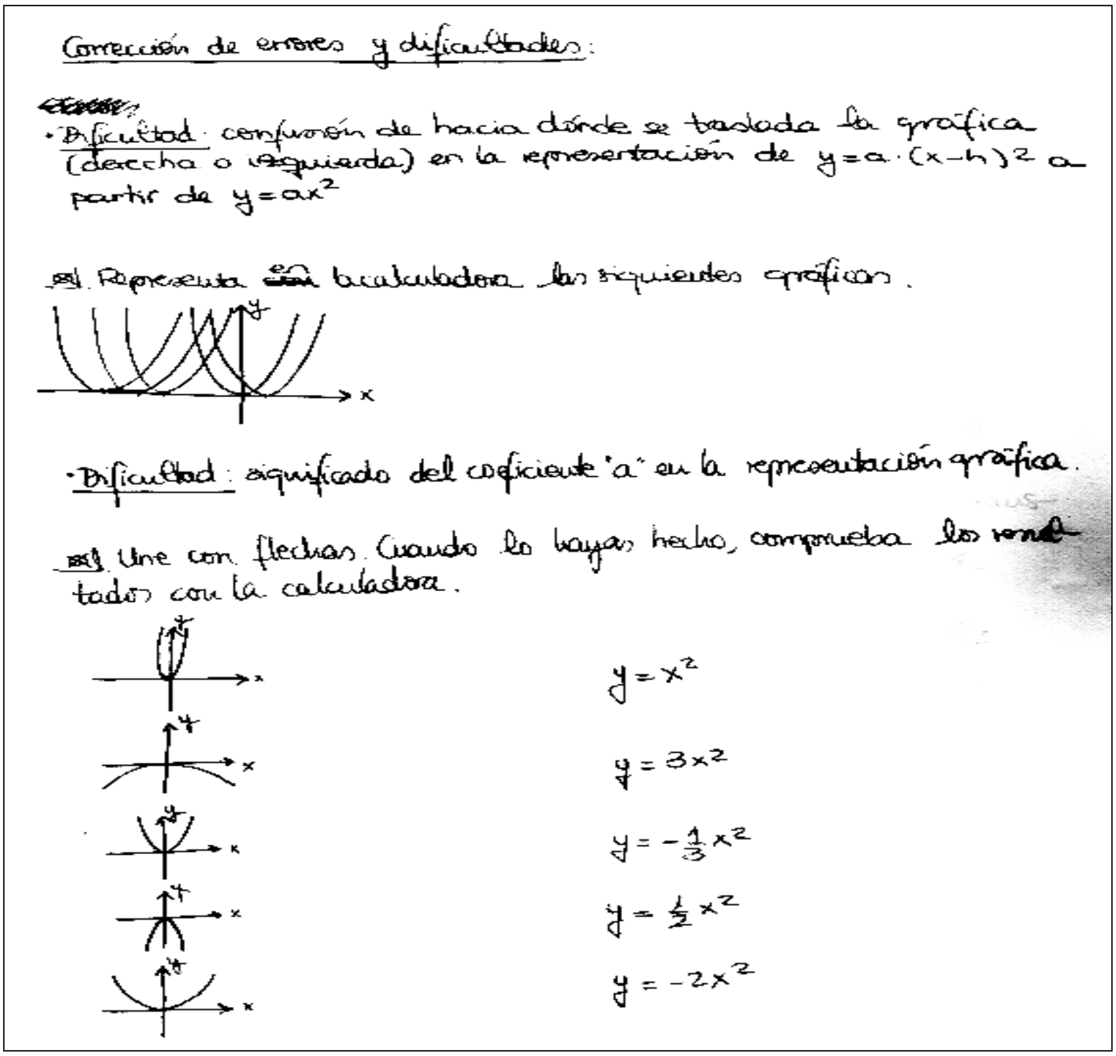
Figura 6.14.
Representación gráfica mediante la calculadora de la trayectoria de la pelota



De esta manera, dice, "*el alumno introduce la calculadora gráfica y se motiva sobre el problema de fondo que realmente interesa, que es el de la obtención de la gráfica y de sus representaciones algebraicas*" estándar y canónica del vértice "*de una función cuadrática cualquiera*". Y a partir de "*transformaciones geométricas y algebraicas de la función* $y=x^2$. *Esto se debe ir haciendo tanto con lápiz y papel, como con la calculadora*".

La manera como propone iniciar el trabajo con la calculadora consiste en mostrar y explicar primero como se construyen las gráficas de $y=x^2$ e $y=-x^2$ mediante la calculadora. Dice que se le explican a los niños los pasos básicos con la calculadora, aunque no dice cuales son estos. Luego propone resolver con los alumnos y "*explicarles y pedirles que expliquen las transformaciones geométricas sufrida de una transformación a otra, mostrando en la calculadora los pasos intermedios*". De acuerdo con esto, esta alumna considera como principales dificultades y causas de errores "*la comprensión y confusión de las transformaciones de las gráficas*" y "*el significado del coeficiente* 'a' *en la representación gráfica*". Para intentar superar estas dificultades y causas de errores propone trabajar una serie de ejercicios sobre distintas transformaciones geométricas, gráficas y algebraicas de parábolas y sus respectivas representaciones simbólica, a partir de la parábola básica y de su representación algebraica estándar ($y=x^2$), siempre utilizando la calculadora graficadora como herramienta de apoyo para obtener, manipular y transformar las sucesivas gráficas que se van obteniendo. En la Figura 6.15 presentamos un facsímil de la tarea final de Rosario en el que se pueden ver algunos de los ejercicios y actividades que propone.

Figura 6.15.
Facsímil de la tarea final de Rosario con ejercicios para trabajar sobre las principales dificultades relacionadas con el tema elegido en relación con el CM



Corrección de errores y dificultades:

• Dificultad: confusión de hacia dónde se traslada la gráfica (derecha o izquierda) en la representación de $y=a\cdot(x-h)^2$ a partir de $y=ax^2$

Ej. Representa en la calculadora las siguientes gráficas.

• Dificultad: significado del coeficiente 'a' en la representación gráfica.

Ej. Une con flechas. Cuando lo hayas hecho, comprueba los resultados con la calculadora.

$y=x^2$

$y=3x^2$

$y=-\frac{1}{3}x^2$

$y=\frac{1}{2}x^2$

$y=-2x^2$

Por último, para la evaluación del tema, Rosario propone en su tarea final una "prueba de evaluación" que es el resultado de la ampliación y complementación de la prueba que propuso en su tarea inicial. Con pocas palabras, esta ampliación y complementación consiste en la introducción de propuestas que interrelacionan y requieren transformaciones de y en diferentes SR, así como de situaciones que posibilitan, sugieren y permiten la utilización de la CG.

Así, por ejemplo, mientras en la tarea inicial proponía simplemente "*resolver las siguientes ecuaciones*" y enseguida daba una serie de (10) ecuaciones cuadráticas de diferentes formas y grados de dificultad (en relación con el número de términos y tipo de coeficientes), posteriormente en su multitarea final, aunque propone las mismas ecuaciones iniciales, ahora sugiere explícitamente utilizar diferentes procedimientos, incluyendo el gráfico mediante el empleo de la CG, bien para resolver la ecuación o el problema gráficamente o simplemente para comprobar e ilustrar el método clásico algorítmico. Incluso, en un ejercicio típico de los de hallar las dimensiones de un rectángulo de área dada, el cual propuso en la tarea inicial para ser resuelto mediante las técnicas tradicionales, lo vuelve a reformular en la tarea final, pero en esta ocasión propone que se resuelva utilizando la aplicación geométrica *Cabri* de la TI-92.

Finalmente, plantea un problema de transformaciones geométricas, que consiste en mostrar gráficamente mediante el uso de la CG, pero explicando en el papel cada transformación geométrica a través de su correspondiente propiedad algebraica, los pasos que hay que seguir para pasar de una expresión o función como $y=-x^2+5$ (tipo estándar) a otra como, por ejemplo, $y=(x-3)^2+2$ (tipo canónica del vértice).

Como conclusión parcial sobre los futuros profesores de la tipología PF-I. debemos decir que estos profesores en formación son los que más efectivamente han accedido a los planteamientos, propuestas y aportaciones que les hicimos durante el desarrollo del curso-taller. Consideramos que esto ha sido posible porque además de que tienen una actitud favorable y un potencial innovador en relación con la incorporación de las NTR en el currículo de matemáticas, fueron los únicos que mostraron tener una actitud de permeabilidad, flexibilidad, reflexividad crítica y autonomía frente a las nuevas propuestas tecnológica, matemáticas y didácticas en general, y frente a las concepciones tradicionales, formales y academicistas sobre los conocimientos matemáticos relativos al contenido matemático que nos ocupó y sobre su enseñanza-aprendizaje. Estas modificaciones en sus concepciones e ideas se debieron fundamentalmente a las actitudes reflexivas y críticas pero abiertas o flexibles frente a las nuevas propuestas basadas en la dupla de organizadores SR y CG. La presentación sistémica y estructurada de la complejidad de este tipo de conocimiento didáctico, contribuyó a que estos estudiantes accedieran efectiva y apropiadamente a las nuevas propuestas tecnológicas y didácticas. No creemos que sea posible, por ejemplo, desarrollar actividades (programas) donde sólo se enseñe a manejar las calculadoras con la esperanza o ilusión de que más tarde sean estos alumnos quienes motu propio las adapten a las nuevas necesidades. La reflexión crítica y la evaluación compartida y participativa en situaciones de programas de formación fundamentados y desarrollados sólidamente son una buena alternativa para alcanzar estos logros tan necesarios hoy día.

6.5. RESUMEN Y CONCLUSIONES GENERALES SOBRE EL CAPÍTULO

En este capítulo hemos justificado la importancia que tiene localmente y en general el estudio de las características de los profesores en formación con respecto al conocimiento didáctico. En el contexto en que nos hemos ubicado para llevar a cabo este estudio, de acuerdo con el diseño, estructura y contenidos del programa y a partir de los resultados de los distintos tipos de análisis realizados hemos encontrado y caracterizado tres grupos o tipología de profesores en formación, a saber: Un primer grupo (**PF-I: efectivos y autónomos**) de futuros profesores con predisposición favorable hacia la integración de las CG en el currículo de matemáticas de secundaria, con un potencial de innovación curricular en relación con la triada de elementos organizadores del modelo local en que se basó el programa y relativamente efectivos y autónomos a la hora de llevar a la práctica propuestas curriculares innovadoras basada en los distintos elementos y contenidos (matemático, tecnológico y didáctico) de dicho modelo. Un segundo grupo de profesores en formación (**PF-II: no autónomos y poco efectivos**), también con predisposición favorable hacia la integración de las CG en el currículo de matemáticas de secundaria y con un potencial de innovación curricular en relación con la triada de elementos del modelo local de los organizadores, pero no autónomos y poco efectivos a la hora de utilizar los conocimientos didácticos sobre el contenido matemático, los sistemas de representación y los recursos tecnológicos en sus propuestas didácticas. Y un tercer grupo o tipología de profesores en formación (**PF-III: reacios**) con predisposición desfavorable y poco innovadores en relación con las posibilidades de integración de las CG en el currículo de matemáticas de secundaria, y no efectivos para considerar en sus propuestas curriculares las nuevas alternativas sobre la estructura conceptual del contenido matemático, los sistemas de representación y las nuevas tecnologías de representación.

Estos análisis y resultados de las tipologías de profesores en formación aportaron elementos importantes sobre y para el funcionamiento y evaluación objetiva y subjetiva del programa, así como para formular propuestas fundamentadas empíricamente de cambio y mejora, con miras a futuras generaciones de dicho programa.

VII

CONCLUSIONES, IMPLICACIONES Y REFLEXIONES FINALES

7.1. INTRODUCCIÓN

> La comprensión de un fenómeno no es una cuestión que consiste en saber observar los 'verdaderos' nexos causales prescritos por la Naturaleza sino en imponer, de acuerdo con unos objetivos, una estructura que surge desde la interacción entre el investigador y el fenómeno (Lincoln y Guba, 1985, p. 150).

En este último capítulo, presentamos a modo de conclusiones generales del estudio, una síntesis de los logros conseguidos en relación, tanto con la hipótesis de trabajo y objetivos de la investigación, como con las dimensiones de análisis y evaluación del programa que hemos desarrollado. También, formularemos propuestas para investigaciones futuras relacionadas con este estudio y presentaremos algunas reflexiones finales al respecto.

La **hipótesis general de trabajo** propone que un plan de formación de profesores de matemáticas que promueva la construcción de un **conocimiento didáctico** basado en determinadas nociones teóricas de referencia y en la ejercitación en el **análisis didáctico** sobre los diferentes contenidos curriculares organizados sistémicamente en un modelo local, contribuye a la adquisición de una **formación didáctica** adecuada. En nuestro caso, estos contenidos se refieren específicamente a la estructura conceptual del tópico matemático considerado (funciones), a los múltiples sistemas de representación usuales para el estudio de las funciones, y a las nuevas calculadoras graficadoras considerados como conocimientos, recursos y herramientas organizadoras del currículo.

Para trabajar sobre esta hipótesis se propuso como **objetivo general** de la investigación diseñar, implementar y evaluar un **programa de formación e innovación universitaria** acompañado de un proceso sistemático y multimétodo de investigación-acción y evaluación de programas educativos. Tras dos ensayos piloto que correspondieron a las dos generaciones iniciales del programa, se puso en marcha una tercera generación (estudio empírico) que se concretizó en el curso-taller realizado. Este objetivo general se desglosó en cinco **objetivos específicos** que a su vez fueron reformulados y subsumidos en dos categorías o **dimensiones** (objetivas y subjetivas) de análisis y evaluación del programa. En síntesis, hemos abordado este estudio como una investigación dirigida a profundizar sobre la formación y el conocimiento didáctico de futuros profesores en el marco curricular local del Plan de Formación Inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

A continuación presentamos a modo de conclusiones generales un balance de los principales resultados y hallazgos organizados en los siguientes apartados:
(i) Conclusiones relacionadas con las dos dimensiones objetivas del programa;
(ii) conclusiones relacionadas con las tres dimensiones subjetivas;
(iii) Reflexiones finales, implicaciones y propuestas para investigaciones futuras.

7.2. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LAS DOS DIMENSIONES OBJETIVAS DEL PROGRAMA

Tal y como lo hemos dicho, el principal objetivo del estudio consistió en la realización y evaluación de un programa local de formación inicial de profesores y formular propuestas de cambio y mejora con miras a futuras generaciones del mismo. Las denominadas **dimensiones objetivas** se refieren a los aspectos estructurales y logísticos del programa. El Capítulo IV se refiere justamente al diseño y planificación y a la evaluación de la implementación del programa. La descripción de la estructura del programa que se presenta en los apartados 4.1 a 4.5 y los análisis descriptivos y evaluaciones de la implementación de la primera y segunda partes del programa que se presentan en los apartados 4.6 a 4.11, junto con la planificación y desarrollo de los materiales para el curso-taller que se presentan en los Anexos 1, 2 y 3, dan cuenta de este objetivo general y parcialmente de los objetivos específicos **O.1**, **O.4** y **O.5**, respectivamente.

Los desarrollos y resultados concretos mencionados anteriormente le confieren al programa un carácter de innovación curricular universitaria cuya puesta a punto y viabilidad han sido contrastadas y evaluadas empíricamente en el estudio. Esto lo consideramos una de las principales aportaciones del trabajo.

El estudio y evaluación de la viabilidad de la incorporación en el currículo a través de un plan de formación inicial de profesores de los contenidos u organizadores curriculares que nos han ocupado, de unas propuestas curriculares concretas y unos tratamientos didácticos particulares son de gran interés y actualidad en el ámbito educativo. Este estudio aporta conocimientos y experiencias de carácter teórico-prácticas sólidas y útiles para fundamentar y orientar la incorporación de estos contenidos y propuestas en los planes de formación inicial de profesores de matemáticas y en el currículo de educación secundaria. Como es sabido desde la experiencia propia y de otros autores (Demana, Schoen y Waits, 1993; Waits y Demana, 1995*a*; Demana y Waits, 1997; Kutzler, 1999; Schmidt, 1999), la incorporación de las tecnologías en el currículo de matemáticas y de propuestas innovadoras y complejas complementarias requiere, además de poder contar con los recursos y materiales tecnológicos y curriculares asociados necesarios, un tipo de formación didáctica adecuada. Esta formación debe ir más allá del simple entrenamiento en el manejo de la tecnología y de la información discursiva sobre sus posibilidades técnicas y didácticas. Como sostienen estos autores (Demana y Waits, 1997), es necesario desarrollar programas de formación y "desarrollo profesional" de profesores de matemáticas rigurosamente diseñados, planificados e implementados. El programa de formación que hemos desarrollado para este estudio aporta información y conocimientos útiles en este sentido.

Por otra parte, el programa lo hemos considerado como un macro-instrumento integrado en la adaptación metodológica que hemos utilizado para llevar a cabo la investigación. El modelo de investigación consiste en un diseño multimétodo ("triangulación metodológica") que integra técnicas e instrumentos múltiples de los modelos de investigación-acción y de la investigación evaluativa de programas. Este diseño o modelo metodológico que se ha revelado útil y ha mostrado su potencial heurístico para desarrollar investigaciones como esta, constituye otra de las aportaciones del estudio. El programa y el diseño han sido descritos y presentados en sus dimensiones estructural y logística con suficiente detalle en los Capítulos III y IV y en los Anexos 1, 2, 3, de tal forma que puede servir de guía a otros investigadores, doctorandos o formadores de profesores para realizar replicas o adaptaciones a sus propios contextos y situaciones, y poder conseguir de esta forma una información útil y específica para dicho contexto. En particular, hemos elaborado y validado un instrumento de evaluación de las actitudes de los futuros profesores de matemáticas hacia la incorporación e innovación en el currículo de secundaria de las modernas tecnologías (calculadoras) graficadoras. Este instrumento desarrollado en el Apartado 5.6 y en el Anexo 5.3 puede ser utilizado en estudios similares o en currículos y planes de formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria.

El estudio de las características del conocimiento didáctico de los futuros profesores a través una variedad de técnicas e instrumentos y la caracterización de diferentes grupos (tipologías) de estudiantes para profesor, constituye otro de los hallazgos y aportaciones importantes de este trabajo. Los capítulos V y VI dan amplia cuenta de los análisis y resultados sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores que participaron en el programa. Para el análisis y caracterización de este conocimiento y su organización en grupos o tipologías de profesores en formación consideramos las diferentes producciones de los participantes en las distintas fases y sesiones del curso-taller. Utilizando esta variedad de técnicas nos centramos en el análisis de los contenidos de tipo matemático (referido a la estructura conceptual y los sistemas de representación), tecnológico y didáctico. En particular, nos interesamos por las concepciones de los participantes relacionadas explícita o implícitamente con la estructura conceptual del tópico matemático en cuestión y su enseñanza, con la consideración o utilización de la pluralidad de sistemas de representación, con las actitudes, conocimiento y dominio de las utilidades didácticas de las tecnologías, con el contenido y tipo de actividades didácticas propuestas en las multitareas iniciales y finales y las participaciones en las discusiones y actividades realizadas durante el desarrollo de las distintas sesiones del curso-taller.

En concreto, en el Capítulo V realizamos análisis segmentarios de tipo lexicométrico de la terminología relevante utilizada en las definiciones y diagramas conceptuales iniciales y finales, análisis *factorial*, *cluster* y de *escalamiento multidimensional* aplicados a la escala de actitudes, y análisis descriptivo de los estilos didácticos de las actividades de enseñanza propuestas en la multitareas iniciales y finales. Y en el Capítulo VI integramos estos resultados, dotándolos de contenidos y significados mediante técnicas de análisis cualitativo de carácter descriptivo-narrativo, con el propósito de caracterizar las diferentes tipologías de futuros profesores detectadas.

De acuerdo con las observaciones anteriores, podemos considerar también que en esta investigación se ha puesto a prueba el diseño teórico del modelo local de los organizadores, así como el propio Plan de Formación Inicial en que estas propuestas se sustentan. La realización y evaluación del programa permitió identificar algunas carencias y necesidades importantes de dicho Plan, especialmente en relación con el conocimiento o la formación didáctica de sus alumnos para profesor. En términos generales, estas carencias están relacionadas con la necesidad de considerar el contenido matemático desde un punto de vista escolar y de proponer un tratamiento integrado de la estructura conceptual relativa a este contenido matemático, la pluralidad de los sistemas de representación (numérico, gráfico, simbólico-algebraico y lenguaje natural) y las utilidades curriculares de las calculadoras graficadoras consideradas como recursos tecnológicos de representación múltiple, visualización y cálculo simbólico. En particular, en relación con las tecnologías, consideramos preocupante el hecho de que, salvo contadas excepciones, la casi totalidad de los alumnos que participaron en las distintas generaciones del programa manifestaron no haber tenido ningún tipo de experiencia sobre estos recursos tecnológicos (véase por ejemplo, la encuesta de la escala de actitudes en el Anexo 5.2).

Los resultados del programa ofrecen alternativas y propuestas a estas carencias y necesidades, así como ofreció en su momento a los participantes de las distintas generaciones del programa elementos complementarios importantes para su formación didáctica. Todos los estudiantes, así como los observadores que participaron en el programa manifestaron en la evaluación final y en los debates y reflexiones conjuntas realizadas durante el desarrollo de las sesiones estar de acuerdo sobre la necesidad y urgencia de la incorporación y naturalización de los contenidos y metodología del curso-taller en los planes de formación inicial del profesorado de matemáticas. De acuerdo con estas evaluaciones, los miembros del equipo de investigadores, los observadores y algunos expertos consultados, además de compartir las solicitudes de los alumnos, concluimos que los cambios y mejoras del programa, considerado como unidad formativa, debieran consistir básicamente en los siguientes aspectos:

(i) Revisión y ajuste de la temporalización en función de los contenidos y elementos organizadores considerados. En particular, con respecto al curso-taller, como plan de formación con la planificación actual debe ser ampliado como mínimo a 6 sesiones de 3 horas cada una para la CG TI-83 y 8 sesiones para la CG TI-92. El 80% de los participantes consideró que el tiempo dedicado en el curso-taller a las tecnologías había sido insuficiente (véase Anexo 6.2). Experiencias previas y durante la investigación nos han mostrado que en promedio el tiempo mínimo para desarrollar las actividades básicas de familiarización y dominio del tipo de tecnología que hemos empleado oscila entre 30 y 40 horas.

(ii) Ampliación a los distintos contenidos o tópicos que se trabajan en las Asignaturas de Didáctica de la Matemática del Plan. Con frecuencia, durante el desarrollo de las actividades del curso-taller, los estudiantes traían a colación otros tópicos sobre los contenidos que estaban trabajando paralelamente en esos momentos en dichas asignaturas. Algunos estudiantes plantearon la posibilidad y solicitaron ayuda para integrar en sus tareas y trabajos prácticos algunas de las actividades que les propusimos en el curso-taller.

(iii) Dar un mayor énfasis, de manera más sistemática, a las distintas cuestiones del conocimiento y análisis didáctico en función de los contenidos matemático, representacional y tecnológico considerados. En general, las producciones explícitas de los estudiantes sobre los temas relacionados con el conocimiento o formación didáctica fueron escasas. Esto se puso de manifiesto también en las discusiones e intervenciones realizadas durante el desarrollo de las sesiones del curso-taller. Las concepciones de los estudiantes para profesor sobre la enseñanza del contenido matemático, sobre la estructura conceptual y el conocimiento matemático escolar, sobre los errores y dificultades, sobre la evaluación y otras cuestiones didácticas están basadas fundamentalmente en sus propias experiencias como estudiantes de secundaria y universidad y en sus creencias, intuiciones y opiniones al respecto. No demuestran un manejo de estos conocimientos de manera sistemática y rigurosa, basada, por ejemplo, en los fundamentos de Didáctica que imparten en las Asignaturas de Didáctica de la Matemática en su Plan de estudio.

(iv) Proponemos considerar un modelo local con, por lo menos, los cuatro elementos organizadores siguientes: la estructura conceptual del tópico matemático en cuestión, los sistemas de representación, la modelización y los recursos, materiales y herramientas tecnológicas de representación múltiple con sistemas de cálculo simbólico integrado. La inclusión de la modelización como cuarto elemento organizador se debe a que la estrategia didáctica integradora de la resolución de problemas vincula de manera natural estos cuatro elementos organizadores del currículo. Durante el desarrollo del programa y su análisis evitamos considerar sistemáticamente este cuarto elemento organizador.

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, los resultados generales del estudio relacionadas con las dos dimensiones objetivas (estructural y logística) se pueden resumir de la siguiente manera:

♦ Se ha desarrollado y evaluado un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza Secundaria, basado en un modelo local de los organizadores. Los contenidos matemático, tecnológico y didáctico del programa han mostrado su grado de adecuación; y en el Capítulo IV se han formulado y justificado propuestas de cambio y mejora para futuras generaciones. En particular, se ha recomendado la ampliación del tiempo mínimo (en dos y tres sesiones, respectivamente), la inclusión necesaria del organizador sobre la modelización en el modelo local y la inclusión de actividades y reflexiones dirigidas de manera más específica al trabajo sobre el conocimiento didáctico en este contexto local relativo a la introducción, desarrollo y evaluación del contenido, así como a la consideración y tratamiento de los errores y dificultades de los estudiantes de secundaria.

♦ La realización y evaluación del programa ha permitido detectar determinadas carencias y dificultades en los alumnos del Plan de Formación Inicial en el que se enmarca el estudio. Al margen de las dificultades y resistencias hacia el recurso tecnológico, puestas de manifiesto por algunos de estos alumnos, el desarrollo del programa, por una parte, contribuyó a la desmitificación favorable sobre la tecnología como recurso didáctico y, por otra, aportó información y documentación útiles sobre las posibilidades de las calculadoras graficadoras, los sistemas de representación y la estructura conceptual como contenidos organizadores del currículo (véanse Anexos 1, 2 y 3).

♦ Mediante el diseño metodológico de la investigación logramos comprobar que la técnica de realización y evaluación de programas integrada complementariamente con ideas de la metodología de investigación-acción es una opción metodológica útil para la investigación en didáctica sobre procesos de formación inicial de profesores de matemáticas. Además, diseñamos y produjimos algunos instrumentos (como la encuesta de evaluación y la escala de actitudes) que junto con el programa mismo, considerado como un macro-instrumento de investigación, son importantes aportaciones de este estudio para futuras investigaciones. El curso-taller asociado al programa también constituye una propuesta de formación sobre los contenidos tratados. Los materiales producidos para los diferentes cursos-taller reúnen una interesante selección de actividades para trabajar no sólo en tareas investigativas sino también en actividades generalizadas de formación de profesores sobre las cuatro cuestiones que nos han ocupado en ese estudio.

♦ A partir de diversas técnicas de análisis aplicadas a las producciones de los alumnos durante el desarrollo del programa se ha descrito y caracterizado el tipo de conocimiento didáctico de estos alumnos, así como sus modificaciones y factores de resistencia al cambio, en relación con las cuatro cuestiones principales del estudio, organizadas sistémicamente en el modelo local de los organizadores. Los resultados de estos análisis se presentan ampliamente en los capítulos V y VI y de manera resumida en el siguiente apartado. En particular, la experiencia de someter reiterada y sistemáticamente a debate sus concepciones (creencias, actitudes, conocimientos didácticos) iniciales sobre el contenido matemático, la enseñanza, los sistemas de representación y las calculadoras, permitió a estos estudiantes realizar alguna reflexión y revisión al respecto. Y aunque, en general, no se evidenciaron cambios sustanciales en sus concepciones, al menos si les permitió tomar conciencia, acerca de que, por ejemplo, la cuestión sobre las calculadoras, como dice Fernández Cano (1991), va mucho más allá que el simple dilema sobre si usarla o no usarla en el currículo o en el aula. Estos alumnos comprendieron y así lo pusieron de manifiesto en sus respuestas a la encuesta de evaluación final, que lo que se necesita es por un lado una transformación apropiada del currículo que permita la incorporación de la tecnología y, por el otro lado, una formación y conocimientos didácticos apropiados para poder realizar esta integración y sacarle el mejor partido de manera efectiva.

♦ Finalmente, hemos iniciado en el grupo de investigación PNA y en el ámbito hispanoamericano de la Didáctica de la Matemática, nuevas líneas de investigación, sobre formación inicial, conocimiento didáctico, la estructura conceptual de la función cuadrática, la pluralidad de sistemas de representación, las nuevas tecnologías de representación y cálculo simbólico como las modernas calculadoras graficadoras, y sobre el diseño modelos locales de los organizadores.

En el Anexo 5.3 hemos agregado una ficha técnica de auto-informe basada en los protocolos estándares de evaluación de programas, empleados en la metodología de investigación evaluativa (Fernández Cano, 1999).

7.3. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LAS TRES DIMENSIONES SUBJETIVAS DEL PROGRAMA

En términos generales, los objetivos específicos **O.2** y **O.3** de la investigación consisten en estudiar la forma como los futuros profesores de matemáticas de secundaria integran y utilizan los distintos elementos del modelo local de los organizadores en sus propuestas curriculares y evaluar el impacto del programa sobre sus conocimientos didácticos al respecto. Los análisis y resultados presentados en los capítulos V y VI nos dan argumentos suficientes para concluir que se han cubierto los dos objetivos mencionados inicialmente, por cuanto que en estos capítulos se describen y caracterizan las repercusiones (impacto) del programa sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas en torno a los contenidos matemático escolar, tecnológico y curricular considerados. Los resultados del programa en relación con estos dos objetivos constituyen a su vez complementos (en los aspectos subjetivos) de los otros tres objetivos específicos de la investigación (O.1, O.4 y O.5)

En el apartado 5.2 se realiza un análisis lexicométrico, descriptivo y comparativo del contenido de las definiciones iniciales y finales con el fin de realizar una primera caracterización de las concepciones de los alumnos sobre la estructura conceptual relativa al contenido matemático. Similarmente, en los apartados 5.3, 5.4 y 5.5 analizamos los diagramas conceptuales. Esto nos permitió complementar los resultados obtenidos inicialmente con el análisis de las definiciones. En el apartado 5.6 mediante las técnicas de análisis *factorial*, *cluster* y de *escalamiento multidimensional* analizamos y evaluamos las actitudes hacia las tecnologías. Los resultados de estos análisis nos permitieron establecer diferentes grupos de profesores en formación. Y en el apartado 5.7 realizamos análisis descriptivo-narrativo sobre el conocimiento didáctico puesto en práctica por parte de los estudiantes al formular sus propuestas de actividades para una unidad didáctica que integrara los tres elementos principales del modelo local.

Un análisis más general, integrador y cualitativo de los anteriores tipos de análisis realizados en el Capítulo V, nos permitió caracterizar distintos grupos o tipologías de profesores en formación. La descripción y caracterización de estas tipologías de futuros profesores, la cual se presenta ampliamente en el Capítulo VI, viene a complementar los logros de los objetivos O.2 y O.3.

Antes de presentar una síntesis de las principales características de cada uno de estos grupos de profesores en formación, procedemos a describir los rasgos comunes que hemos detectado en todos ellos. Para referirnos a estas características las consideraremos organizadas de acuerdo con las tres dimensiones subjetivas del programa: relativa a la estructura conceptual (**EC**) y los sistemas de representación (**SR**), relativa a los recursos curriculares de las tecnologías (**CG**) y relativa al conocimiento didáctico (**CD**) en torno a estos tres elementos organizadores.

♦ En relación con la primera dimensión subjetiva (relativa a la **EC** y los **SR**), encontramos que, durante las distintas fases de todas las generaciones del programa, y especialmente durante la primera fase, todos los participantes, sin excepción, demostraron tener un tipo de concepción o punto de vista sobre la naturaleza del conocimiento matemático “formalista” y “academicista”. Esta manera de concebir el conocimiento matemático concreto que nos ocupa la hemos denominado o caracterizado más específicamente como *euleriano*, centrado en un híbrido de lenguajes natural y simbólico-algebraico, con muy poca o ninguna referencia gráfica (véanse los análisis de las definiciones en el Apartado 5.2 y las distintas actividades didácticas propuestas en la multitareas en el Anexo 4). Todos los alumnos identificaron los conceptos de función y ecuación cuadrática con su representación simbólico-algebraica. Cuando hicieron alguna referencia a la representación gráfica, la mayoría lo hizo de manera anecdótica, como si la representación gráfica fuera una característica o atributo de la representación simbólico-algebraica.

♦ En relación con la segunda dimensión subjetiva, relativa al **dominio de las utilidades didácticas y las actitudes hacia las CG**, encontramos que, en general, hay diferentes grupos o tipologías de futuros profesores (véanse los resultados de los análisis *cluster* y de *escalamiento multidimensional* en los Apartados 5.6.8 y 5.6.9, respectivamente). Los diferentes tipos de análisis estadísticos-descriptivos aplicados a la escala de actitudes, mostraron que hay por lo menos tres grupos o tipologías de profesores en formación. De acuerdo con el cuadrante del análisis gráfico de *escalamiento multidimensional* en el que tendieron a agruparse (véase Figura 5.8), los denotamos por: **PF-III**, **PF-II** y **PF-I**. Y a partir de los análisis cualitativos realizados complementariamente los denominamos (interpretamos) como reacios, aquiescentes y efectivos, respectivamente. En el capítulo VI se presenta una amplia descripción y caracterización de estas tipologías, y en los siguientes sub-apartados se presenta brevemente una síntesis de ellas.

En realidad, tal como se puede observar en la Figura 5.8, el primero y segundo grupo (**PF-I** y **PF-II**, respectivamente) forman un grupo más amplio que corresponde a aquellos alumnos para profesor (60%) que demostraron tener mayor número de indicadores de actitud favorable hacia la tecnología como elemento organizador del currículo y un alto potencial innovador en relación con las opciones de integración y utilización de la tecnología en el currículo. Sin embargo, análisis más detallados permitieron establecer diferencias importantes entre estos dos grupos. La principal diferencia consiste en que los profesores en formación del grupo **PF-I** (30%) demostraron ser además efectivamente innovadores y autónomos a la hora de incorporar las CG y las aportaciones del programa en sus propias propuestas curriculares. En pocas palabras, los alumnos de la primera tipología demostraron haber desarrollado una mayor o mejor comprensión de la complejidad del modelo en que se basó el programa, yendo efectiva y autónomamente más allá de las buenas intenciones y nominalidad en que se quedaron los alumnos de la segunda tipología (PF-II, 30%).

♦ En relación con la tercera dimensión subjetiva (relativa al conocimiento didáctico) encontramos que, inicialmente, todos los alumnos pusieron de manifiesto tener ideas o concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas de carácter "tradicional", en estrecha coherencia con sus ideas "formalistas" y "academicistas" sobre el contenido matemático y basadas fundamentalmente en sus propias experiencias como estudiantes. Esto se puede comprobar directamente observando las diferentes actividades didácticas propuestas en sus multitareas iniciales (Anexo 4) y en sus intervenciones en las distintas discusiones conjuntas realizadas durante el desarrollo de las sesiones del curso-taller.

Podemos afirmar que el modelo metodológico de enseñanza inicial de todos los alumnos está basado en la introducción del tema (por ejemplo, la función cuadrática) mediante un problema escolar típico o "estandarizados", tal que, para resolverlo, se requiere plantear una ecuación cuadrática. Frecuentemente, en la práctica, esta ecuación termina planteándola y resolviéndola el mismo profesor. A partir de esta situación-problema el profesor define y "explica" las nociones y procedimientos del contenido elegido y que están involucrados implícitamente en el problema planteado. Algunas de estas nociones y procedimientos, que resultan ser al final fundamentales para el tópico y su estructura conceptual, el futuro profesor las presenta ("explica") en lenguaje natural asignándoles sus respectivos nombres técnicos usados en matemáticas. Como por ejemplo, "una expresión de la forma $y=ax^2+bx+c$ se denomina una función cuadrática", o "el punto de abscisa $x = {-b}/{2a}$ se llama el vértice de la gráfica". Es decir, proponen una enseñanza basada en el discurso tradicional y nada constructiva.

Sobre los aspectos cognitivos, concretamente sobre las dificultades y errores relativos a los diferentes temas del contenido matemático, aunque todos incluyeron en sus propuestas didácticas, algún tipo de análisis cognitivo al respecto (porque lo pedía la tarea), esto sólo constituyó una sección aparte o aislada de la propuesta, y no un tema central sobre el cual había que trabajar sistemáticamente durante la introducción, desarrollo y evaluación del tema.

Sin embargo, conforme se iban desarrollando las distintas sesiones del curso-taller y especialmente hacia las últimas sesiones, los alumnos presentaron diferentes tipos de modificaciones relacionadas con el conocimiento didáctico. La mayoría (70%) de los alumnos fueron muy resistentes a modificar las ideas y actitudes iniciales con perspectivas escolares sobre sus manera de concebir el conocimiento matemático referido a la estructura conceptual, la pluralidad de sistemas de representación y las utilidades didácticas de las tecnologías empleadas. En términos generales, estos alumnos no accedieron efectivamente a la complejidad de las propuestas didácticas y tecnológicas innovadoras que se les presentaron durante el desarrollo del curso-taller. Es decir, no accedieron a la complejidad del modelo local de los organizadores en que se basó el diseño y planificación del programa. Los alumnos que fueron resistentes a modificar sus ideas sobre la enseñanza del contenido matemático, coinciden con los que también mostraron resistencia a modificar sus concepciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático. No podemos establecer cual condicionó a la otra.

Entre estos alumnos, algunos (el 29%), aun sin lograr descentrarse del sistema de representación simbólica-algebraica, es decir, sin modificar su manera formalista de concebir el contenido matemático, hacia el final del curso-taller empiezan a dar muestras de interés y comprensión por la utilidad didáctica que supone el tratamiento de múltiples representaciones. Sin embargo, se centran más en el tratamiento en el mismo sistema de representación habitual simbólico-algebraico. Proponen actividades didácticas que consisten en pasar de un tipo de expresión algebraica (por ejemplo, la expresión algebraica estándar de la función cuadrática) a otra (la expresión algebraica canónica del vértice). Pero a diferencia de la enseñanza tradicional, que se suele preocupar solamente porque el proceso algorítmico de transformación algebraica se realice correctamente (sin cometer errores), estos futuros profesores se interesaron más por las diferentes propiedades algebraicas y gráficas que uno y otro tipo de expresión permite traslucir mejor. El problema es que la representación gráfica no la consideran con carácter sistémico, sino como un atributo de las expresiones algebraicas que, además, suponen que sus propiedades están dadas implícitamente y se pueden visualizar de forma inmediata.

Otros alumnos (30%) demostraron mayor flexibilidad, reflexión crítica frente a los métodos de enseñanza tradicional y fueron más efectivos y autónomos frente a las nuevas propuestas curriculares, tecnológicas y didácticas del curso-taller. En pocas palabras, estos alumnos pusieron de manifiesto haber accedido a la complejidad del modelo local de los organizadores.

La combinación de los distintos tipos de análisis realizados no sólo han permitido definir diferentes tipologías de profesores en formación, sino también caracterizar con mayor detalle los perfiles tipológicos de estos futuros profesores. En las siguientes secciones presentamos, a modo de resultados y conclusiones, las respectivas síntesis de estas caracterizaciones de las tres tipologías encontradas.

7.3.1. Los profesores del grupo PF-III: Resistentes al cambio y a la innovación curricular-tecnológica

Este tercer grupo de futuros profesores, además de tener una actitud desfavorable hacia las calculadoras graficadoras como elemento organizador del currículo y un potencial conservador sobre las posibilidades curriculares de esta tecnología, se mostraron resistentes o reacios a la modificación de sus concepciones originales acerca del contenido matemático y la enseñanza de estos contenidos basada en la consideración de la estructura conceptual (EC), la pluralidad de los sistemas de representación (SR) y las utilidades didácticas de las calculadoras graficadoras (CG). Incluso, en algunos casos, esta tipología de profesores en formación, no sólo no mostraron un cambio positivo, sino que por el contrario, reafirmaron aún más sus tendencias actitudinales. Consideramos que, en buena parte, esta resistencia al cambio se debe tanto a las actitudes iniciales como a sus concepciones sobre la naturaleza del contenido matemático y los procesos de enseñanza. Resulta curioso que, a pesar de haber manifestado inicialmente que no habían tenido ninguna experiencia ni conocimientos sobre estas tecnologías, mostraran explícitamente distintas opiniones sobre el peligro y las desventajas que suponen para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, resulta paradójico que a pesar de considerarlas interesantes y útiles para ellos como estudiantes de matemáticas, las encuentran "peligrosas" y problemáticas como recursos para la enseñanza-aprendizaje con estudiantes de secundaria.

Los alumnos de esta tipología cuando introducen la tecnología en sus propuestas curriculares lo hacen de una forma limitada e inadecuada. Las proponen en secciones especiales y aparte, como una novedad que sólo sirve para economizar tiempo al realizar con ella cálculos difíciles o muy largos. También la proponen frecuentemente para comprobar resultados obtenidos previamente mediante los métodos canónicos y algorítmicos de la matemática y las tecnologías tradicionales del papel y el lápiz.

En síntesis, consideramos que los dos principales factores que condicionaron fuertemente las posibilidades de los profesores de este grupo para acceder a las diferentes perspectivas e instrumentos teóricos, metodológicos y tecnológicos del modelo local de los organizadores fueron, por una parte sus propias concepciones formalista, academicista y tradicional sobre el contenido matemático y su enseñanza, y su actitud desfavorable y poco innovadora en relación con las posibilidades de incorporación de la tecnología en el currículo y en el aula de matemáticas de enseñanza secundaria.

7.3.2. Los profesores en formación del grupo PF-II: Aquiescentes y poco autónomos frente a nuevas propuestas curriculares y tecnológicas

Este segundo grupo de profesores en formación, a pesar de tener la mayor asignación numérica de actitudes favorables y potencial innovador en relación con la tecnología como elemento organizador del currículo, y a pesar de incrementar este índice hacia el final del curso-taller, no mostraron ser efectivos y autónomos a la hora de poner en práctica las propuestas curriculares innovadoras. Estos alumnos también mostraron resistencia a la modificación efectiva de sus concepciones sobre la estructura conceptual del contenido matemático y su enseñanza basada en la pluralidad de sistemas de representación y en las utilidades didácticas de la tecnología. Además, hacia el final del curso-taller, dan un mayor y mejor protagonismo didáctico a los sistemas de representación simbólico-algebraico y gráfico, aunque a este último no le dan un tratamiento sistémico sino solamente referencial y mediador para la comprensión de propiedades algebraicas. Esto no debe extrañar, puesto que para estos alumnos el concepto (por ejemplo, de función cuadrática) coincide con su representación simbólico-algebraica (concepción *euleriana* formalista).

Estos alumnos también proponen que la tecnología se utilice en secciones aisladas y para trabajar actividades especiales. Utilizan actividades en las que hay que trabajar con familias de gráficas y hacen conversiones entre un tipo de representación y otra. El principal problema es que estas actividades especiales no están relacionadas estrechamente con las demás actividades, las cuales han diseñado o elegido desde sus concepciones tradicionales sobre el conocimiento matemático y su enseñanza. El tipo de actividades especiales que eligen para trabajar con la calculadora pone de manifiesto la poca autonomía de estos alumnos a la hora de acceder y adaptar adecuadamente las nuevas propuestas a sus propuestas originales. Modificar sus propuestas originales y adaptarlas al uso de la tecnología puede resultar muy difícil, si antes no modifican sus ideas sobre el contenido matemático y sobre su enseñanza. Los alumnos de esta tipología, como los de la tercera, tampoco consideraron ni admitieron la posibilidad de utilizar calculadoras graficadoras en las pruebas de evaluación porque, para ellos, en las pruebas de evaluación se examina justamente si el estudiante ha aprendido lo que ellos consideran que deben haber aprendido sus estudiantes sobre el tema en cuestión. Naturalmente, esto es un reflejo también de su sistema de ideas sobre el contenido matemático y su enseñanza.

7.3.3. Los profesores del grupo PF-I: Reflexivos, innovadores, autónomos y efectivos frente a las nuevas propuestas curriculares y tecnológicas

Los futuros profesores del grupo **PF-I**, aparte de tener una actitud favorable e innovadora en relación con las posibilidades curriculares de la tecnología, se diferencian de los de la segunda tipología en que son efectivos y autónomos a la hora de adquirir y adaptar las nuevas propuesta curriculares del programa. Estos alumnos se caracterizaron por ser mucho más flexibles y reflexivos que los demás. Aunque no dieron grandes muestras de modificación de sus ideas formalistas sobre el contenido matemático, si llegaron a considerar las nociones y procedimientos de la estructura conceptual del tópico con propósitos escolares. Además, demostraron efectiva y explícitamente que comprendieron la pluralidad de los sistemas de representación como recursos didácticos y como sistemas y lenguajes, al menos el gráfico y algebraico, y también consiguieron algún dominio sobre las diferentes utilidades didácticas de las calculadoras como herramientas mediadoras de estos tipos de representaciones.

En pocas palabras, los futuros profesores de la tipología **PF-I**, accedieron efectivamente, con cierta autonomía y eficacia al modelo local de los organizadores. Consideramos que la clave de estos alumnos consistió, además de su predisposición favorable y a pesar de sus ideas iniciales sobre el contenido matemático y su enseñanza, a sus maneras flexibles, reflexivas y críticas de abordar las nuevas propuestas curriculares sobre los distintos elementos o conocimientos teórico-prácticos asociados al modelo. En resumen, las principales características comunes de los futuros profesores que conforman la tipología **PF-I** son: una actitud favorable hacia la tecnología, voluntad de cambio, apertura a las propuestas y tecnologías innovadoras, y una postura reflexiva y crítica, tanto frente a "lo establecido" o tradicional (en relación con el CM y su enseñanza), como ante las nuevas propuestas, así como cierta actitud de compromiso y voluntad para intentar llevar a efecto las nuevas propuestas curriculares y didácticas.

7.4. REFLEXIONES FINALES E IMPLICACIONES

Los resultados y hallazgos del estudio nos han suscitado algunas reflexiones que creemos se deben tener en cuenta a la hora de pensar en el diseño y planificación de un programa de formación e innovación curricular que integre tecnología como el que hemos desarrollado y evaluado en este estudio. También, han generado algunas opciones e implicaciones para futuras investigaciones. La primera reflexión se refiere a los resultados aparente y relativamente modestos sobre el aprovechamiento por parte de los alumnos (alrededor del 30%). El ideal de un programa de formación e innovación educativa es que la mayoría de los futuros profesores asimilen efectivamente las propuestas curriculares que se formulan con miras al mejoramiento de su formación didáctica. Si bien se han hecho propuestas de mejora, estas están referidas a sus aspectos estructurales y logísticos. Un pregunta interesante que surge es por qué el programa consiguió llegar a unos alumnos y no a otros. Esta pregunta que no estaba entre los objetivos del estudio se puede constituir en una pregunta investigativa para una futura generación del programa. Consideramos que una nueva generación del programa debería preocuparse por la atención de la diversidad de sujetos, de tal manera que atienda sus actitudes y concepciones iniciales sobre el conocimiento matemático escolar, su enseñanza y en fin sus conocimientos didácticos enfocados al análisis didáctico. Igualmente, convendría plantearse investigaciones de seguimiento de los participantes en las distintas generaciones del programa.

Otro tipo de reflexión se refiere a las dificultades derivadas de la gran complejidad y coste que supone una propuesta de programa de formación de estas características que, a la vez, resulta tan necesaria para el mejoramiento de la calidad de la formación de los futuros profesores. Tal como lo hemos indicado, el proceso de formación didáctica inicial de los profesores de matemáticas de enseñanza secundaria debe abordarse necesariamente en un marco teórico-práctico, sólidamente estructurado y que no soslaye su complejidad. En nuestro caso, las distintas generaciones del programa se concretaron en un curso-taller, de no más de cuatro semanas lectivas, enfocado principalmente hacia la observación y descripción de la participación de los alumnos y recogida de la información pertinente para la investigación, y no tanto hacia el logro de modificaciones positivas de sus conocimientos matemáticos escolares y de su formación didáctica.

Estas reflexiones y conclusiones anteriores nos han llevado a preguntarnos de forma general sobre los principales obstáculos que dificultan o impiden el acceso de los futuros profesores de matemática a propuestas curriculares, didácticas y tecnológicas innovadoras como las que les hemos presentado durante el desarrollo del programa, así como para la generalización de estas propuestas a los demás profesores en formación. Aparte de los aspectos específicos a que nos hemos referido en los análisis y evaluaciones y en las conclusiones y reflexiones de los capítulos anteriores, hemos considerado estas clases de obstáculos de acuerdo con los tres tipos de cuestiones generales siguientes: **1. Personales**. Especialmente relacionadas con las concepciones individuales sobre el papel de las nuevas tecnologías y los sistemas de representación en la educación, la cultura y la sociedad. **2. Curriculares**. Referidas a los obstáculos y dificultades derivados del carácter mismo de la institución escolar, concebida como una colectividad educativa, social y profesional. **3. Institucionales**. Referidos a las instituciones de carácter tanto administrativo como académico o disciplinar.

1. Sobre las cuestiones personales. Los seres humanos tenemos una resistencia natural, y, a veces razonable, a cambiar nuestro entorno. Especialmente, aquellas cuestiones que nos producen y garantizan cierta comodidad y seguridad. Por eso solemos tener prevención hacia lo nuevo, lo desconocido y lo que percibimos o creemos que de algún modo nos desestabiliza o puede llegar a hacerlo. Esto es válido también en relación con nuevos conocimientos, nuevas propuestas, nuevas teorías y nuevas tecnologías. En particular, las propuestas innovadoras y las nuevas tecnologías suelen provocar un sentimiento particular de incertidumbre cuando creemos que nos supera y nos sentimos incapaces de aprovechar o explotar sus posibilidades. Para aceptar efectivamente una propuesta innovadora, las personas necesitan revisar y modificar sus creencias, sus actitudes, sus convicciones, en fin, sus concepciones. Necesitan desarrollar nuevas maneras de concebir y nuevas habilidades.

Los cambios suelen estar motivados, en unos casos, por situaciones y procesos de crisis, en otros por la curiosidad innata de algunas personas y en otros por el interés y reconocimiento de la necesidad o posibilidad de cambio para mejorar el entorno y estatus personal y profesional. Estas son algunas de las motivaciones que llevan a ejercer algún tipo de iniciativa y liderazgo por parte de determinadas personas dentro del proceso y desarrollo de un programas de innovación. En este tipo de personas o agentes (como lo hemos percibido en los alumnos de la tipología **PF-I**), las propuestas innovadoras generan una gran expectativa e ilusión que con frecuencia logran transmitir a otras personas. Sin embargo, somos conscientes que estos procesos requieren de cierta regularidad, constancia y sistematización, tanto por parte de los sujetos, como por parte de las condiciones y oportunidades recogidas en el contexto de un programas de formación o intervención. Hemos constatado que cuando la incertidumbre ante la tecnología se ve suplantada y recompensada por pequeñas conquistas o aciertos, el interés y la credibilidad aumentan y hacen posible una mayor confianza y una mejor predisposición actitudinal ante estos "extraños" recursos.

Creemos que es mediante la oferta de oportunidades de información y formación relevantes, con cierta regularidad y continuidad, a través de estas funciones de iniciativa y "liderazgo" de dichos agentes y en el marco de un programa rigurosamente diseñado y planificado, como estas propuestas pueden llegar a los demás, adquirir significados y convertirlas en instrumentos de aplicación, creación y comunicación. Para promover la generalización de estas posibilidades sigue siendo necesaria la formación y la experiencia demostradas empíricamente de agentes como los del grupo de futuros profesores **PF-I**, es decir, como personas con actitudes favorables e innovadoras, un mayor interés, capacidad y competencia crítica para percibir, comprender e interesarse por propuestas innovadoras y complejas. Consideramos que sin la prueba empírica del poder que tienen estas propuestas y recursos tecnológicos para movilizar concepciones, actitudes, capacidades y conocimientos, nuestro programa de formación e intervención educativa quizás hubiese sido un rotundo fracaso, no sólo por el "efecto suelo" de unos posibles resultados abocados al desastre del mito de la hipótesis nula, sino también por sus desalentadoras consecuencias para el interés que el equipo de investigadores hemos proyectado sobre el problema objeto de estudio.

2. Sobre las cuestiones curriculares. Tal y como lo sugerimos en el epígrafe anterior, una característica de los fenómenos y situaciones educativas que nos interesan estudiar consiste en su gran complejidad y sistematicidad. Por esto mismo, los procesos de cambio también resultan de una complejidad y sistematicidad similar y, por lo tanto, no pueden ser realizados por una sola persona, ni siquiera por un conjunto de pocas personas, ni en situaciones y ocasiones aisladas en el tiempo y el espacio. Tales decisiones y procesos deben ser tomadas por colectivos de personas y con cierta regularidad y constancia, de manera que se puedan neutralizar las resistencias que ofrecen los grupos con infraestructura institucional. Es bien conocido que los grupos suelen ser más conservadores de situaciones y tradiciones que los individuos. Además, en los grupos se suelen diluir las responsabilidades, compromisos y decisiones. Los cambios y propuestas de cambio sociales, suelen estar mediados por múltiples intereses y fuerzas, profesionales, sociales y económicas, que hacen que resulte más difícil aún generar y mantener el mejoramiento de lo que hay (lo establecido) y en donde los individuos se han venido acomodando de forma natural. Las propuestas innovadoras a través de programas de formación bien diseñados y planificados y probados empíricamente, pueden contribuir a generar o reconocer la situación de crisis y desequilibro de estas fuerzas y favorecer dichos procesos de cambio y mejora.

3. Sobre las cuestiones Institucionales. Las presiones para el cambio y mejora de la situación y los procesos educativos, mediante promoción y aceptación de nuevas propuestas y recursos innovadores, así como los obstáculos y dificultades que generan, también tienen que ver con la realidad y circunstancias de las instituciones. Es necesario promover la toma de conciencia acerca de este desequilibrio entre fuerzas favorables y desfavorables, si se quiere tener éxito al implementar un programa de formación, con miras a promover los procesos de cambio y mejora.

Una propuesta curricular de formación de profesores, con las características y objetivos como los del programa que hemos implementado en este trabajo, y especialmente su continuidad a través de nuevas generaciones está fuertemente relacionada con las instituciones administrativas y disciplinares que lo contextualizan. Incluso, podríamos decir que su éxito depende fuertemente de éstas. Tanto la frecuencia y continuidad, como sus dimensiones y envergadura de carácter teórico-fundamental, científico-tecnológico, económico-financiero, profesional y humano dependen de factores institucionales, administrativos y disciplinares.

Hemos constatado que es necesario tener en cuenta consideraciones como las anteriores a la hora de evaluar las necesidades y viabilidad de la realización de un programa de formación que involucre agentes participantes, instituciones y currículos.

7.5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS Y PROPUESTAS PARA INVESTIGACIONES FUTURAS

En relación con los resultados y reflexiones anteriores, hemos formulado y dejado en el aire para trabajos futuros, preguntas tales como:

- ¿Qué factores objetivos y subjetivos condicionan el aprovechamiento de los contenidos matemáticos, tecnológicos y didácticos y las diferentes propuestas del programa en los futuros profesores de matemática?

- ¿Qué repercusiones tienen en el mediano plazo los efectos del programa sobre el desempeño profesional de los futuros profesores?

- ¿Qué cambios hay que introducir en el programa para intentar conseguir que los futuros profesores de la tercera tipología (PF-III) modifiquen sus actitudes desfavorable y conservadora hacia la integración de las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas?

- ¿Qué cambios y mejoras hay que introducir para lograr que el cambio de predisposición desfavorable en favorable de este tipo de alumnos de la tipología PF-III, así como las actitudes favorable e innovadora de los futuros profesores de la tipología PF-II se tornen en reflexiva y efectiva con respecto a la integración de las nuevas tecnologías de representación en el currículo de matemáticas?

- ¿Cuáles serían los efectos al diseñar otros programas de formación basados en otros modelos locales de los organizadores? Por ejemplo, al introducir el organizador modelización en el modelo o al considerar un contenido matemático más amplio o diversificado.

Las perspectivas de investigación mencionadas anteriormente y en los cuales se inscribe nuestro trabajo están actualmente vigentes, tanto nacional (España y Colombia) como internacionalmente (México, Francia, Japón, Inglaterra, Estados Unidos, etc.). En el mismo Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se están desarrollando actualmente varios trabajos en esta misma línea de investigación. Más específicamente, la anteriores preguntas permiten definir problemas para futuras investigaciones. Debemos tener en cuenta que este trabajo constituye un primer trabajo en el que se pone a prueba la propuesta teórica de los organizadores del currículo. Además, metodológicamente, proponemos un modelo local y parcial (triádico) de los organizadores curriculares. De acuerdo con este modelo, los organizadores en la propuesta general vendrían a constituir variables teóricas a considerar. En nuestro trabajo hemos considerado tres –la estructura conceptual del tópico en cuestión, la pluralidad de sistemas de representación y los recursos y materiales tecnológicos con opciones de representación múltiple y sistema de calculo simbólico–, otro trabajo que se esta desarrollando en estos momentos considera otros tres: el CM, la Modelización y las CG. Y una de nuestras propuestas de cambio y mejora del diseño del programa consiste en considerar los cuatro organizadores siguientes: –la estructura conceptual, los recursos y materiales tecnológicos, la pluralidad de sistemas de representación y la modelización–. Anteriormente explicamos que la principal justificación para propone incluir este cuarto contenido organizador tiene que ver con la consideración de la resolución de problemas como estrategia didáctica integradora.

Por otra parte, creemos que realizar estudios que complementen y generalicen el que hemos realizado nosotros, con respecto a los alumnos de otras promociones o de otras universidades, y con respecto al contenido y metodología, podrían proporcionar información interesante para la Didáctica de la Matemática sobre la articulación sistémica de una estructura conceptual de un contenido matemático determinado, los sistemas de representación, la modelización y las nuevas tecnologías de representación múltiple con sistema de cálculo simbólico. Mediante la realización de este estudio hemos comprobado que actualmente sigue haciendo falta mucha información al respecto procedente de la investigación y el trabajo educativo sistemático. Toda esta información y los resultados obtenidos son de interés, no sólo para la Universidad de Granada, sino también para todos aquellos centros con planes de inicial y permanente de profesores de matemáticas, así como para todos los especialistas e interesados en dicha formación y sus consecuencias.

En particular, consideramos que la Administración Educativa debiera estar interesada efectivamente en estudios similares a mayor escala, realizados con profesores de matemáticas en activo, e implementar así, profesionalmente, programas de formación de profesores de matemáticas, fundamentados científicamente y validados empíricamente en sus respectivos contextos y especificidad. En todo caso, la experiencia y conocimiento que personalmente hemos ganado, así como la abundante información que nos han proporcionado todos los participantes, fuentes documentales, tecnologías, materiales y recursos, dejan abierto un campo de estudio específico sobre la formación didáctica inicial de profesores en relación con los diferentes contenidos estructurados en modelos locales de los organizadores. Actualmente, es absolutamente necesario continuar con la caracterización local de las concepciones sobre el conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas en formación inicial y en servicio. Así mismo, con respecto al diseño e implementación metodológica, consistente en la integración de múltiples metodologías (modelo integrado de investigación-acción y evaluación de programas educativos), instrumentos y técnicas de observación y análisis, dejamos abierta una propuesta que se debe seguir desarrollando sobre esta forma de realizar investigaciones y trabajos de formación profesional en Didáctica de la Matemática.

Solo nos queda esperar que el esfuerzo realizado en este trabajo tenga consecuencias curriculares y didácticas transformadoras positivas y concretas en nuestro contexto acción educativa. De esta manera esperamos haber contribuido y seguir contribuyendo así al desarrollo de tan importante y necesaria disciplina, la Didáctica de la Matemática.

Evelio Bedoya M.

REFERENCIAS

Adams, T. (1997). Addressing Students' Difficulties With the Concept of Function: Applying Graphing Calculators and Model of Conceptual Change. *Focus: On Learning Problems in Mathematics*. Winter Edition, 19 (2), 43-57.

Alvira, F. (1991). *Metodología de la evaluación de programas*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

Anderson, L. W. (1987). The classroom environment study: Teaching for learning. *Comparative Education Review*, 31 (1), 69-87.

Apodaca, P. (1999). Evaluación de los resultados y del impacto. *Revista de Investigación Educativa*, 17 (2), 363-377.

Apostol, T. (1976). *Calculus*. Barcelona: Reverté.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view. En Dubinski, E.; Harel, G. (Eds.), *The concept of function: some aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washintong DC: Mathematics Association of America.

Atweh, B.; Kanes, C.; Carss, M.; Booker, G. (Eds.) (1993). Context in mathematics education: Linear and quadratic graphs with aid of technology. *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, (pp. 51-56). Brisbane: Queensland University of Technology.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Bilbao: Departamento de Investigación y Evaluación Educativa, Universidad de Deusto.

Azcárate, C.; Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Bedoya, E. (1996). *Estudio del sistema didáctico en torno a conceptos básicos del Análisis, basado en el enfoque de visualización asistido por nuevas tecnologías graficadoras*. Memoria de Tercer Ciclo. Sin publicar. Barcelona: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Bedoya, E.; Rico, L. (1998). Calculadoras graficadoras y enseñanza de las matemáticas en secundaria. *Actas del IV simposio sobre investigación en el aula de matemáticas* (pp. 113-131). Granada: SAEM-Thales.

Bedoya, E. (2001). La enseñanza del cálculo en un ambiente de calculadora graficadora, papel y lápiz. En Gómez, P.; Rico, L. (Eds.). *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada.

Beesey, C.; Rasmussen, D. (1994). Using graphics calculators to motivate study of parabolas and quadratic functions. En Beesey, C.; Rasmussen, D. (Eds.). *Mathematics without limits* (pp. 140-144). Melbourne: Mathematical Association of Victoria.

Bericat, E. (1998). La integración de los métodos cuantitativos y cualitativos en la investigación social. Significado y medida. Barcelona: Ariel.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En Lesh, R.; Landau, M. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Bishop, A.; Clements, K.; Keitel, Ch.; Kilpatrick, J.; Laborde, C. (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Blanco, L. (1996). Aprender a enseñar matemáticas: tipos de conocimiento. En Giménez, J.; Llinares, S.; Sánchez, V. (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 199-219). Granada: Comares.

Blanco, L. J.; Mellado, V. (2001). La Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. *Epsilon*, 50, 355-360.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Busquets, O.; Fortuny, J.; Gairín, J. (1996). Evaluación de la actitud hacia la matemática de los alumnos de BUP y COU. Izquierdo y Fortuny (Eds.). *Elaboración de instrumentos de evaluación diagnóstica de los conocimientos de ciencias y de matemáticas en los niveles no universitarios*. Barcelona: Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona.

Camacho, M.; González, A. (2001). Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 61-68.

Campbell, D.; Stanley, J. (1982). *Diseños experimentales y cuasi experimentales en la investigación social*. Buenos Aires: Amorrortu.

Castro, E. (1995b). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Granada: Comares.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, E.; Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Cockroft, W. H. (1985). *Las matemáticas si cuentan. Informe Cockroft.* Madrid: M.E.C.

Coll, C. (1988). *Psicología y curriculum*. Barcelona: Laia.

Coll, C., Pozo, J. I., Sarabia, B., Valls, E. (1992). *Los contenidos en la reforma: Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*. Madrid: Santillana.

Cornu, B. (1992). Computers as an Aid to Teaching and Learning Mathematics. En Cornu & Ralston (Eds.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching* (pp. 25-32). Paris: UNESCO.

Cornu, B.; Ralston, A. (Eds.) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Paris: UNESCO.

De Miguel, M. (1999). La evaluación de programas: entre el conocimiento y el compromiso. *Revista de Investigación Educativa*, 17 (2), 345-348.

De Miguel, M. (2000). La evaluación de programas sociales: Fundamentos y enfoques teóricos. *Revista de Investigación Educativa*, 18 (2), 289-317.

Demana, F.; Waits, B. (Eds.), (1988*). Proceedings of the Firsts. International Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Demana, F.; Waits, B. (1992). A computer for *All* Students. *Mathematics Teacher*, 85, 94-95.

Demana, F.; Waits, B. (1997*).* A zero-based technology enhanced mathematics curriculum for secondary mathematics. En Ralston, A; Burkhardt, H (Eds.), *Proceedings of WG 11, ICME* 8. England.

Demana, F.; Waits, F.; Harvey (Eds.) (1991). *Proceedings of the Second Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Demana, F.; Waits, F.; Harvey (Eds.) (1992). *Proceedings of the Third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Demana, F.; Schoen, H.; Waits, B. (1993). Graphing in the K-12 Curriculum: The impact of the Graphing Calculator. En Romberg, Fennema & Carpenter (Eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Deulofeu, J. (1993). *Els Gràfics cartesians de funcions: un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del gràfic*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos sobre distintas gráficas de funciones. *UNO*, 4, 6-16.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. En Grows, D. (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 39-47). New York: Macmillan Publishing Company.

Dubinski, E.; Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En Dubinski, E. y Harel, G (Eds.), *The concept of function: some aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 85-106). Washintong DC: Mathematics Association of America.

Dubinsky, E.; Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washintong, DC: Mathematical Association of America.

DRAE, (1992). *Diccionario de la Lengua Española* (XXI). Madrid: Real Academia Española.

Dunham, P.; Dick, T. (1994). Research's on Graphing Calculators. *The Mathematics Teacher*, 6 (87), 440-445

Duval, R. (1988). Graphiques et Équations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999*a*). *Semiosis y pensamiento humano – Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali : Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (1999*b*). *Les problèmes fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques et les formes supérieures du développement cognitif. Cours donné à l'Universidad del Valle*. Santiago de Cali: Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. En Dubinski, E. y Harel, G (Eds.), *The concept of function: some aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 85-106). Washintong, DC: Mathematics Association of America.

Eisenberg, T. (1994). Functions and associated learning difficulties. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: Towards a social constructivist account. *Science & Education*, 1 (1), 89-100.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.

Even, R. (1993). Subject-Matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (2), 94-116.

Even, R.; Markovits, Z. (1991). Teachers' pedagogical knowledge: The case of functions. *Proceeding XV PME*. Assisi, Italy.

Even, R.; Tirosh, D. (1995). Subject-Matter knowledge and knowledge about as source of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1), 1-20.

Even, R.; Tirosh, D.; Markovits, Z. (1996). Teacher subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Research and development. *Proceeding* XX PME. Valencia, España.

Feferman, S. (1989). *The Number Systems. Fundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Fennema, E.; Franke, M. L. (1992). Teacher's knowledge and its impact. En Grows, D. (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). New York: Macmillan Publishing Company.

Fernández Ballesteros, R. (Ed.) (1995). *Evaluación de Programas: Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud. Madrid*: Síntesis.

Fernández Ballestero, R. (1996). El ciclo de intervención social y evaluación. En Fernández-Ballesteros, R. (Ed.), *Evaluación de Programas: Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud*. (pp. 49-74). Madrid: Síntesis.

Fernández Cano, A. (1991). *Impacto de la calculadora electrónica en la educación matemática primaria. Un estudio cuasi-experimental en tercer nivel.* Tesis doctoral. Sin publicar. Granada: Departamento de Pedagogía, Área MIDE. Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Granada.

Fernández Cano, A. (1999). Ficha técnica de autoinforme de evaluación de un programa. En programa de la asignatura evaluación de programas, centros y profesores. Documento interno. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Fernández Cano, A. (Ed.) (2002). *Arbor: Estudio de casos*, Nº 675, Tomo CLXXI.

Fernández, A.; Rico, L. (1989). *Prensa y matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Fey, J.; Hirsch, Ch. (Eds.) (1992). *Calculators in Mathematics Education – Yearbook*. Reston VA: NCTM

Flores, P. (1998*a*). *Proyecto Docente*. Sin publicar. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Flores, P. (1998b). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada: Comares.

Forns, M.; Gómez, J. (1995). Evaluación de programas en Educación. En Fernández-Ballestero, R. (Ed.), *Evaluación de Programas: Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud* (pp. 241-282). Madrid: Síntesis .

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht (Holland): D. Reidel

Gairín, J. (1987). *Las actitudes en Educación. Un estudio sobre Educación Matemática*. Barcelona: PPU.

Gall, M.D.; Borg, W. R.; Gall, J.P. (1996). *Educational Research. An introduction*. London: Logman.

García Blanco, M. M. (1996). *Análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza Secundaria y el concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje. Aportaciones metodológicas*. Tesis Doctoral. Sin publicar. Sevilla: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

García, A.; Martínez, A.; Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre la evaluación en matemáticas*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gil, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre la evaluación en matemáticas*. Almería: Universidad de Almería.

Gil, F., Rico, L.; Fernández, A. (2000). Pensamiento sobre evaluación en profesores de matemáticas de secundaria. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 13, 261-294.

Gisin, V. (1995). Notes on research work of math students using mathematical exploration toolkits. *TEMU 95: Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad*. Barcelona: Departament de Matemàtica Aplicada, Universitat Politècnica de Catalunya.

Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas al inicio de su formación. En Perales y otros (Eds.): *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI*, 2, (pp. 1851-1864). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Gómez, P.; Carulla, C. (1999). Mapas conceptuales, sistemas de representación y concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. [Doc. Online]. http://ued.uniandes.edu.co/ servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/ConcProfFunCuad.html.

Gómez, P.; Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Sin publicar. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

González Río, M. J. (1997). *Metodología de la Investigación Social. Técnicas de recolección de datos*. Valencia: Aguaclara.

González, E.; Gutiérrez, J.; Rico, L. y otros (1989). *Contextos y situaciones cotidianas en el estudio de las funciones*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González, E.; Gutiérrez, J.; Rico, L. (1990). Iniciación al concepto de función. *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (pp. 141-152). Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas.

González, D.; Hidalgo, E.; Gutiérrez, J. (Coords.) (2000). *IX Jornadas LOGSE: Innovación en la escuela y mejora de la calidad educativa*. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Gutiérrez, J.; González, E.; Rico, L. (1990). La representación gráfica como expresión de relaciones entre variables. *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (pp. 153-161). Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas.

Gutiérrez, J. (1997). *Proyecto Docente*. Sin publicar. Granada: Departamento de Diagnóstico y Metodología de Investigación Educativa, Universidad de Granada.

Gutiérrez, J.; Pozo, T.; Fernández Cano, A. (2002). El estudio de casos en la lógica de la investigación interpretativa. En Fernández Cano, A. (Ed.), *Arbor: Estudio de casos*, Nº 675, Tomo CLXXI, 553-558.

Harshbarger, R. (1995). Training In-Service and Pre-service Teachers in the Use of Technology. *Electronic Proceedings of the Eighth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. http://archives.math.utk.edu/ICTCM

Harvey, J.; Demana, F.; Waits, B. (Eds.) (1990). *Proceedings of the Third International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática*, 7 (1), 63-75.

Hitt, F. (1996). Difficulties in the articulation of different representations linked to de concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista de Educación Matemática*, 10 (1), 23-45.

Hitt F. (1999). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. En Goldin, G.; Janvier C. (Eds.). *Special Issue: Representations and the Psychology of Mathematics. Education. Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

Hitt F. (Ed.) (2000). Report of the working group Representation and Mathematics Visualization. *Twenty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, Arizona.

ICTCM (1988-2001). *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. [Doc Online]. http://archives.math.utk.edu/ICTCM

Izquierdo, M.; Fortuny, J. (Eds.) (1996). Elaboración de instrumentos de evaluación diagnóstica de los conocimientos de ciencias y de matemáticas en los niveles no universitarios. Barcelona: Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, UAB.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations – studies and teaching experiments-*. Tesis doctoral sin publicar. University of Nottingham, Shell Center for Mathematics Education & Université du Québec, Montréal.

Janvier, C. (1987*a*). Representation and understanding: The notion of function as an example. En Janvier, C. (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Janvier, C. (Ed.) (1987b). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Jurado, P.; Flores, P. (1997). Concepciones de los estudiantes para profesor de secundaria sobre los métodos de enseñanza de las matemáticas. En Domingo, J. y otros (Eds.), *Formación y desarrollo de los profesores de Educación Secundaria en el marco curricular de la reforma. Actas del II Congreso de Formación del Profesorado* (pp. 13-22). Grupo Force y Grupo Editorial Universitario.

Kant, E. (1978) *Crítica de la razón pura*. Madrid: Alfaguara.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. New Jork: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grows (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Keeves, J. P. (1988). *Educational Research Methodology and Measurement: An International Handbook*. Oxford: Pergamon Press.

Kepner, H. (1990). Preparing Teachers to use Technology in the Teaching of Mathematics. *Proceedings of the Third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Keller, B.A.; Hirsch, C.R. (1994). Student preferences for representations of functions. En Lum , L. (Ed.) *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 178-190). Reading MA: Addison-Wesley.

Kimmins, D. (1995). Technology in School Mathematics: A Course for Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Electronic Proceedings of the Eighth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* [Doc on-line]. http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-8.html

Kutzler, B. (1999). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics [Doc. Online]. http:// www. kutzler.com/bk/bk.html

Lacasta, E.; Pascual, J. R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Latorre, A.; Del Rincón, D.; Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: GRAÓ.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O.; Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: task, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.

López Rupérez, F. (1991). Análisis de la influencia de la construcción de mapas conceptuales sobre la estructura cognitiva en estudiantes de Física. *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (2), 135-144.

Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.) (1990). *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: ALFAR.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID (Grupo Investigación Didáctica), Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1998). Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 117-127.

Lupiáñez, J. L. (2000). *Nuevos acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la calculadora TI-92*. Memoria de Tercer Ciclo. México: Cinvestav, IPN.

Lum, L. (Ed.) (1994). *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC.

Martínez Mediano, C. (1998). La teoría de la evaluación de programas. *Educación XX1: Revista de la Facultad de Educación*, 1, 73-91. Madrid: UNED.

MEC (1989). *Diseño Curricular Base – Educación Secundaria Obligatoria - Área de Matemáticas*. Madrid: MEC.

MEC (1991). *Bachillerato: Estructura y Contenidos*. Madrid: MEC.

MEC (1992). *Secundaria Obligatoria: Matemáticas*. Madrid: MEC.

Moreno, L.; Sacristán, A. (1995). On visual and symbolic representations. En Sutherland, R.; Mason, J. (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer-Verlag.

Moreno, L. (1997). La educación matemática hoy. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática*, 2 (2), 101-114.

Moreno, L. (1998). *History of Calculus and Technology - The construction of mathematical meaning*. México: Cinvestav.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Edición en Castellano. Sevilla: SAEM-THALES.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Novak, J.; Gowin, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Novak, J. (1998). *Conocimiento y aprendizaje: Los mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas*. Madrid: Alianza.

Ortiz, J. (2000). *Modelización y calculadora gráfica en la Formación Inicial de profesores de matemáticas*. Memoria de Tercer Ciclo. Sin publicar. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Penglase, M; Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. *Mathematics Education Research Journal*; 8 (1), 58-90.

Pérez Juste, R. (1994a). Investigación evaluativa. En García Hoz, V. (Dir.), *Problemas y métodos de investigación en educación personalizada* (pp. 404-418). Madrid: Rialp.

Pérez Juste, R. (1994b). Investigación y mejora de programas. Programas comunes y programas personales. En García Hoz, V. (Dir.), *Problemas y métodos de investigación en educación personalizada* (pp. 510-537). Madrid: Rialp.

Pérez Juste, R. (1997). Evaluación de programas. En Salmerón Pérez, H. (Coord.), *Evaluación Educativa*. Granada: GEU.

Pérez Juste, R. (2000). La evaluación de programas educativos: conceptos básicos, planteamientos generales y problemática. *Revista de Investigación Educativa*, 18 (2), 261-287.

Piaget, J. (1979). I*nvestigaciones sobre la abstracción reflexionante*. Buenos Aires: Huemul.

Pozo, M. T. (2000). La evaluación de necesidades en la intervención educativa de calidad. En González, D.; Hidalgo, E. y Gutiérrez, J. (Coords.). *IX Jornadas LOGSE: Innovación en la escuela y mejora de la calidad educativa*, (pp. 375-379). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Radford, L. (2001). Rethinking representations. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – Working Group Representations and Mathematics Visualizations*. Tucson, Arizona.

Ralston, A. (1992). The Impact of Computers Technology and Computer Science on the Mathematics Curriculum. En Cornu, B. y Ralston, A. (Eds.) *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. (pp.19-24). Paris: UNESCO.

Raymond, A. (1997). The Use of Conceptual Mapping in Qualitative Research: A Multiple Case Study in Mathematics Education. *Focus: On Learning Problems in Mathematics*, 19 (3), 1-28.

Rico, L. (1992*a*). *Proyecto Docente*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. (1992*b*). *Investigación sobre errores de aprendizaje en educación matemática*. Documento no publicado. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. (1994). Componentes básicas para la Formación del Profesor de Matemáticas de Secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 21, 33-44.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L y Gómez; P. (Eds.): *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (1996). Pensamiento numérico. En Hitt, F. (Ed.), *Didáctica: Investigaciones en Matemática Educativa* - XX Aniversario Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (Coord.) (1997*a*). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rico, L. (Ed.) (1997*b*). *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L (1997*c*). Reflexiones sobre la Formación Inicial del Profesor de Secundaria en Didáctica de la Matemática. En Abraida, C. y De Francisco (Eds.): *Simposio sobre el Curriculum en La Formación Inicial de los Profesores de Primaria y Secundaria en el Área de Didáctica de la Matemática. Actas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.

Rico, L. (1997d). Reflexiones en torno al Currículo para el Profesor de Matemáticas de Secundaria. Sin publicar. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. (1998*a*). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. RELIME - *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 22-39.

Rico, L. (1998*b*). Conocimiento Profesional en Educación Matemática. Rico (Coord.). *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 15-23, Monográfico sobre Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria.

Rico, L. (1998*c*). La formación didáctico-matemática del profesor. En Oliveras (Ed.), *Proceedings of the ICEM* 1, (pp. 115-116). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1999). Matemáticas, Universidad y Formación del Profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 34, 245-262.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. Ponencia presentada en el Seminario sobre Representación y Comprensión en el IV Simposio de la SEIEM, Huelva. [Doc Online]. http://cumbia.ath.cx/lr.htm.

Rico, L.; Castro, E.; Coriat, M. (1996). *Investigaciones sobre el currículo de matemáticas en la Universidad de Granada*. Sin publicar. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L.; Flores, P. (1998). Didáctica de la Matemática. En Fernández, M.; Moral, C. (Eds.), *Formación y desarrollo de los profesores de educación secundaria en el marco curricular de la reforma* (pp. 63-76). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Rico, L.; Gutiérrez, J. (Eds.) (1994). *Formación Científico-Didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria*. Granada: ICE-Universidad de Granada.

Rico, L.; Castro, E.; Romero, I. (1996). The Role of Representation Systems in the Learning of Numerical Structures. En Gutiérrez, A.; Puig, L. (Eds.): *Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, I. Valencia: Universidad de Valencia.

Rico, L.; Castro, E.; Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En Beltrán, J. et al. (Eds.): *Intervención psicopedagógica y currículum escolar*, (pp. 153-182) Madrid: Pirámide.

Rico, L.; Sierra, M. (1991). La Comunidad de Educadores Matemáticos. En Gutiérrez, A. (Ed.): *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

Rico, L.; Sierra, M. (1994). Educación Matemática en la España del Siglo XX. En Kilpatrick; J.; Rico, L.; Sierra, M. (Eds.): *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.

Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. (Eds.) (1993). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Roulet, R. G. (1998). *Exemplary Mathematics Teachers: Subject conceptions and instructional practices*. Doctoral thesis. Department of Curriculum, Teaching & Learning, Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto.

Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén Servicio de Publicaciones.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 431-450.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the Mathematics Curriculum: The Scope of Personal Computational Technology. En Bishop, A.J. et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematical Education*, (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Saenz, O. (1997). La formación didáctica de los profesores de Enseñanza Secundaria. *Revista. Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 28, 39-51.

Sánchez, E. (1997). La función de graficación de la calculadora para mejorar la comprensión en tareas de factorización. En Hitt, F., *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 411- 423). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, M. (2000). Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving. En Hitt, F. (Ed.), *Report of the working group Representation and Mathematics Visualization. Twenty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 111-130). Tucson, Arizona, USA.

Santos, M.; Espinoza H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations via the use of dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33 (1), 37-50.

Sarabia, B. (1992). El aprendizaje y la enseñanza de las actitudes. En Coll, C. et al.. *Los contenidos en la reforma*: *Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*. Madrid: Santillana.

Schmidt, M. E. (1999). Middle Grade Teachers' Beliefs about Calculator Use: Pre-project and Two Years Later. *Focus: On Learning Problems in Mathematics*, 21 (1), 18-34.

Scriven, M. y cols. (Dirs.) (1967). *The Methodology of Evaluation*. Chicago: Rand McNally&Co.

Scriven, M. (1991). *Evaluation thesaurus*. Newbury Park, CA: Sage.

Segovia, I.; Rico, L. (2001). Unidades didácticas y organizadores. En Castro, E. (Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Shell Centre (1986). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school.* Manchester: Joint Matriculation Board.

Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspectives. En Wittrock, M. (Ed.): *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. En Dubinski, E.; Harel, G. (Eds.), *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education: An introduction. *Learning of Mathematics*, 5 (2), 11-17.

Stuflebeam, D. L.; Shinkfield, A. J. (1987). *Evaluación sistemática*. Barcelona: Paidós.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,*12, 151-169.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the Calculus. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. USA: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1992). L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. En Cornu, B. (Dir) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France.

Tall, D.; West, B. (1992). Graphic Insight into Mathematical Concepts. En Cornu, B. y Ralston, A. (Eds.), *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching* (pp. 117-123) Paris: UNESCO.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.

Tejedor, F. (2000). El diseño y los diseños en la evaluación de programas. *Revista de Investigación Educativa*, 18 (2), 319-339.

Texas Instruments (1996). TI-83: Calculadora Gráfica. Manual del usuario. Utrecht: Texas Instruments.

Texas Instruments (1996). TI-92. Manual del usuario. Utrecht: Texas Instruments.

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Douglas, G. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM*. New York: Macmillan.

Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 4, Abril de 1995.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

Villar, L. M. (1988). *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores*. Alcoy: Marfil.

Vinner, S.; Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 356-366.

Vinográdov, I. M. (Dir.) (1994). *Enciclopedia de las Matemáticas*. Madrid: Rubiños.

Waits, B.; Demana, F. (1995*a*). La reforma de las Matemáticas y el papel de la tecnología. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, 76-84.

Waits, B.; Demana, F. (1995*b*). The TI-92: The next revolution in hand-held computer enhanced mathematics teaching and learning. [Doc. on-line]. http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/ papers.html.

Warren, V.; Ling, J. (1995). Calculators update. *Micromath*, 11-12, 22-24.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19 (1), 20-44.

Zimmermann W. (1991). Visual Thinking in Calculus. En Zimmermann, W.; Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

Zimmermann W.; Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? En Ziimmermann and Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

Zimmermann W.; Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

URL'S

http://www.ugr.es/~dpto_did/

http://www.ugr.es/~dpto_did/gpnumeric

http://www.ugr.es/~dpto_did/docencia.htm#secundaria

http://www.matedu.cinvestav.mx/

http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/

http://cumbia.ath.cx/lr.htm

http://www.ti.com/calc/ (*Texas Instruments Resources*)

http://archives.math.utk.edu/ICTCM

http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers.html

http://www.kutzler.com/bk/bk.html

http://www.t3ww.org/index.html